# Lösningsförslag till KS 1 2004-04-02

## Diff och Trans 2 del 2

1. a) Periodlängden är $T=4$ och grundvinkelfrekvensen $\Omega = 2\pi/4 = \frac{\pi}{2}$. Funktionen är udda och kan därför utvecklas i en sinusserie

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega x$$

där $b_n$ ges av

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin n\Omega x\, dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin n\Omega x\, dx$$

$$= \int_0^2 f(x)\sin \tfrac{n\pi}{2}x\, dx = \int_0^1 x\sin \tfrac{n\pi}{2}x\, dx + \int_1^2 (2-x)\sin\tfrac{n\pi}{2}x\, dx$$

$$= I_1 + I_2$$

Partialintegration ger

$$I_1 = \left[\frac{-\cos\frac{n\pi}{2}x}{\frac{n\pi}{2}}x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos\frac{n\pi}{2}x}{\frac{n\pi}{2}}\, dx$$

$$= -\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}$$

Man ser att

$$I_2 = \int_1^2 (2-x)\sin\tfrac{n\pi}{2}x\, dx = [u = 2-x]$$

$$= \int_1^0 u\sin\tfrac{n\pi}{2}(2-u)\cdot(-1)\, dx$$

$$= (-1)^{n+1} I_1$$

Detta innebär att $b_n \neq 0$ endast för udda n och

$$b_{2k+1} = 2 \cdot \left[ - \frac{\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{2k+1}{2}} \right] + \frac{8}{\pi^2 (2k+1)^2} \cdot \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{8 \cdot (-1)^k}{\pi^2 (2k+1)^2}$$

**Svar.** Serien är $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8 \cdot (-1)^k}{\pi^2 (2k+1)^2} \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) x$

b) Funktionens höger och vänsterderivata existerar i $x=1$ och den är kontinuerlig i $x=1$

Fourierserien är därför konvergent i $x=1$ och lika med sitt funktionsvärde $f(1)=1$

Vi får därför

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2k+1)^2} \cdot (-1)^k \cdot (-1)^k,$$

dvs.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. a) Funktionen är jämn och kan därför utvecklas i en cosinusserie.

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

Vi får $b_n = 0$ för alla $n$ och

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{t}{2} \cos nt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\frac{t}{2} \cos nt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left[\cos(n+\tfrac{1}{2})t + \cos(n-\tfrac{1}{2})t\right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})\pi}{n-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \left[ \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right] = \underline{\underline{\frac{1}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\frac{1}{4}}}}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{t}{2} \, dt = \underline{\underline{\frac{4}{\pi}}}$$

b) Parsevals formel ger i detta fall (se Beta s. 308)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\frac{t}{2} \, dt = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2$$

Vi får $$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-\frac{1}{4})^2}$$

Uträkning ger $$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}}}$$

3. Låt den första ortogonala funktionen vara $\varphi_0(x) = 1$

En funktion $\varphi_1(x) = a + bx$ som är ortogonal mot $\varphi_0$ och har högsta koefficient $b=1$ har formen $\varphi_1(x) = a + x$

Ortogonalitetsvillkoret blir

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot (a+x)(1+x^2)\,dx = 0$$

Detta ger $a = 0$ och $\varphi_1(x) = x$

En funktion av andra graden ortogonal mot $\varphi_0$ och $\varphi_1$ och med högstagradskoefficient 1 har formen

$$\varphi_2(x) = c + dx + x^2$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x(c+dx+x^2)(1+x^2)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow d = 0$$

$c$ bestäms nu av

$$\langle \varphi_0, \varphi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (c + x^2)(1+x^2)\,dx = 0$$

vilket ger $c \int_{-1}^{1} (1+x^2)\,dx = -\int_{-1}^{1} x^2(1+x^2)\,dx$

$$\Rightarrow c = -\frac{2}{5}$$

Svar. Systemet är $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2 - \frac{2}{5}$