Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till inlämningsuppgift nr 1, Diskret matematik för F3, 5B1203, vt 04.

Uppgift 1. Ansätter två matriser X respektive Y:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Ekvationerna $XA = I$ och $YA = I$ leder till två ekvationssystem ett där vi räknar modulo 5 och ett där vi räknar modulo 6. Det första går alldeles utmärkt att lösa därför att alla element i Z_5 utom nollan har invers i Z_5. När vi löser det andra systemet får vi olösbara ekvationer typ $3s = 2$. Finns inget $s \in Z_6$ som satisfierar denna ekvation. Observera att det inte räcker att konstatera att elementet 3 saknar invers i Z_6 eftersom ekvationer typ $3s = 3$ ju faktiskt har tre lösningar i Z_6, $s = 1, 3, 5$.

Uppgift 2. Bestämmer först en lösning. Vi kan dela med sex och får ekvationen

$$12x + 9y + 8z = 96.$$

Den har ju uppenbarligen lösningen $(x, y, z) = (0, 0, 12)$. Låt nu (x', y', z') vara en annan lösning. Då gäller

$$12(x - x') + 9(y - y') + 8(z - z') = 0.$$

Nödvändigt är att talet 4 delar $y - y'$ dvs $y = y' + 4n$ för något heltal n. Om detta gäller har vi att

$$12(x - x') + 8(z - z') = -36n \quad \text{eller} \quad 3(x - x') + 2(z - z') = -9n.$$

Denna ekvation har bl a lösningen $x - x' = s = -9n$ och $z - z' = t = 9n$. Vore s', t' en annan lösning skulle $3(s - s') + 2(t - t') = 0$ varur vi sluter att $t - t' = 3m$ och $s - s' = -2m$ eftersom 3 måste dela $t - t'$. Alltså måste $x - x' = -9n - 2m$ och $z - z' = 9n + 3m$. Enda möjliga lösningar till ursprungliga ekvationen skulle alltså vara om x, y och z uppfyllde följande ekvationer fór några heltal n och m

$$x = 0 - 9n - 2m \qquad y = 0 + 4n \qquad z = 12 + 9n + 3m.$$

Det är lätt att verifiera att för varje val av tal n och m så är detta en lösning.

Uppgift 3. Ringen Z_{315} är isomorf med ringen $Z_5 \times Z_7 \times Z_9$ och om funktionen φ beskriver denna isomorfi gäller

$$\varphi(x) = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{där} \quad x \equiv_5 x_1, \quad x \equiv_7 x_2, \quad x \equiv_9 x_3.$$

Då $\varphi(32^x) = \varphi(226)$ får vi tre samband för x:

$$2^x \equiv_5 1 \qquad 4^x \equiv_7 2 \qquad 5^x \equiv_9 1.$$

Vi söker de minsta potenser av 2, 4 och 5 i respektive ringarna Z_5, Z_7 och Z_9 som ger 1. De är 4, 3 respektive 6. Då $4^2 \equiv_7 2$ får vi då att de enda tal x som uppfyller potensekvationerna ovan är

$$x = 0 + 4n \qquad x = 2 + 3m \qquad x = 0 + 6s,$$

för några heltal n, m och s. Den sista ekvationen ger att x delas av talet 3 vilket skulle vara omöjligt enligt den andra ekvationen. En lösning x kan omöjligt finnas.