MATEMATISKA INSTITUTIONEN
KTH
Examinator: Svante Linusson
telefon 790 9444

Tenta A i 5B1204 DISKRET MATEMATIK för D
7 juni 2006

Max är 27 poäng och 13 räcker säkert för godkänt. Möjlighet att kompletera får den som har 12 poäng. Godkänt på lappskrivningarna 1-3 ger en bonuspoäng per styck.
Skrivtid: 8.00-13.00.
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel tillåtna.
Motivera dina lösningar!!!

1. Bevisa att det finns oändligt många primtal. (3 poäng)
2. Formulera och bevisa rekursionen för Stirlingtal av andra slaget $S(n, k)$, inklusive startvärden. (3 poäng)
3. Ge en exakt formel för a_n som ges rekursivt av
$$a_n - 2a_{n-1} - 8a_{n-2} = 0,$$
med startvärden $a_0 = 0, a_1 = 3$. (3 poäng)
4. Nu på fredag börjar VM i fotboll för herrar.
   (a) Sveriges VM-trupp består av 3 målvakter och 20 utespelare. På plan skall det vid start vara 1 målvakt och 10 utespelare som skall väljas bland dessa. På hur många sätt kan förbundskaptenen då sätta ihop laget till en matchstart? (Vi bortser från alla överväganden om skadade spelare, att olika utespelare är olika duktiga på olika positioner etc.) (2 poäng)
   (b) De 32 lag som är med i VM har delats in i 8 grupper (kallade Grupp A,...,Grupp H) med 4 lag i varje grupp. På hur många sätt kan en sådan gruppindelning göras? (OBS 1: Grupperna är namngivna. OBS 2: I praktiken har man en del extra villkor, men det skall du inte ta hänsyn till.) (2 poäng)
   (c) Hur många ord med 3 bokstäver kan man skriva av bokstäverna i FOTBOLLSFEBER?(2 poäng) (Med ¨ord¨ menas här vilken bokstavskombination som helst, det behöver inte vara riktiga svenska ord.)
5. Själva bollen i årets VM kallas ¨Teamgeist¨ och ser mycket annorlunda ut än den klassiska fotbollen. Fotbollen Teamgeists yta är ihoplimmad av ett antal delar. Det finns två sorters delar, låt oss kalla dem A och B. Varje A-del har gemensam kant med 3 andra A-delar och med 3 B-delar. Varje B-del har gemensam kant med 4 andra delar. Ingenstans på fotbollen möts fyra eller fler delar i en punkt, utan högst tre. Hur många B-delar finns det på fotbollen? (Tips: Använd Eulers sats om plana grafer.)
OBS! Av din lösning måste framgå varför informationen ovan räcker för att avgöra detta. Det räcker inte med att rita något specialfall om hur bollen kanske ser ut. (3 poäng)
6. Avgör för vart och ett av dessa fall (med motivering) om det finns en graf med 6 noder som har dessa valenser: (a) 1,1,2,3,4,5 (b) 1,3,3,4,4,5 (c) 1,1,2,3,4,4
(Liksom boken antar vi att det inte finns öglor (loops) eller multipla kanter.) (3 poäng)
7. Låt $\alpha, \beta \in S_5$ vara givna av $\alpha = (14)(253), \beta = (123)(45)$. Bestäm ett $\tau \in S_5$ sådant att $\tau\alpha\tau^{-1} = \beta$. (3 poäng)
8. Visa att $5x^4 + 27y^2 + 1 = 0$ saknar heltalslösningar x, y. (Tips: räkna modulo lämpligt heltal) (3 poäng)

Lycka Till!
Svante

Svar kommer att ligga ute på hemsidan efter skrivtidens slut.
Där meddelas också när tentan är färdigrättad.