MATEMATISKA INSTITUTIONEN
KTH
Examinator: Olof Heden
Telefon: 0730 547 891

Lösningar till tenta A i 5B1204 DISKRET MATEMATIK för D och 5B1203 DISKRET MATEMATIK för F3 och F1spec den 5 juni 2007.

1. (3p) Visa att två permutationer är konjugerade om och endast om de är av samma typ.

   Lösning: Se lärobok.

2. (3p) Låt φ beteckna Eulers φ-funktion. Visa att om $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ där talen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ är olika primtal och $e_1, e_2, \ldots, e_k$ är positiva heltal så gäller att

$$\varphi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_k}).$$

   Lösning: Se lärobok.

3. (a) (1p) Beräkna 7!.

   Lösning: $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

   (b) (1p) Beräkna $S(5, 3)$.

   Lösning: Använder att $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$ och får då
   $S(5, 3) = S(4, 2) + 3S(4, 3)$.
   $S(4, 3) = S(3, 2) + 3S(3, 3) = S(3, 2) + 3 \cdot 1$.
   $S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2) = 1 + 2S(3, 2)$.
   $S(3, 2) = S(2, 1) + 2S(2, 2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.
   Detta ger nu
   $S(4, 2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7$.
   $S(4, 3) = 3 + 3 \cdot 1 = 6$.
   $S(5, 3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25$.

   (c) (1p) Beräkna $\binom{8}{2,3,3}$.

   Lösning:

$$\binom{8}{2, 3, 3} = \frac{8!}{2!3!3!} = 7! = 540.$$

4. (a) (2p) Beräkna $1024^{4096} \pmod{51}$.

   Lösning: Då $51 = 3 \cdot 17$ så

$$\varphi(51) = 51(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{17}) = 2 \cdot 16 = 32.$$

   Då talet 51 inte delar talet 1024, och då $4096 = 2^{12} = 2^5 \cdot 2^7 = 32 \cdot 128$ så gäller enligt Eulers sats att

$$1024^{4096} \equiv_{51} (1024^{32})^{128} \equiv_{51} 1^{128} \equiv_{51} 1.$$

   Svar: 1

(b) (2p) Bestäm 17^{-1} i ringen Z_{53}.

Lösning: Vi använder Euklides algoritm för att hitta en lösning till den diofantiska ekvationen $53x + 17y = 1$.

$53 = 3 \cdot 17 + 2$
$17 = 8 \cdot 2 + 1$

Detta ger att $1 = 17 - 8 \cdot 2 = 17 - 8(53 - 3 \cdot 17) = 25 \cdot 17 - 8 \cdot 53$ och varur vi får

$$1 \equiv_{53} 25 \cdot 17$$

så vi får

Svar: $25 = 17^{-1}$ i ringen Z_{53}.

5. (3p) Grafen G har precis en cykel. Antalet noder i G är 384 och antalet kanter är 383. Hur många komponenter består G av.

Lösning: Tag bort en kant från cykeln. Då är varje komponent ett träd och det som återstår av grafen är 384 noder och 382 stycken kanter. Om antalet komponenter är k, komponenten T_i har v_i noder och $v_i - 1$ stycken kanter, $i = 1, 2, \ldots, k$ så gäller

$384 = \sum_{i=1}^{k} v_i$
$382 = \sum_{i=1}^{k}(v_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} v_i - \sum_{i=1}^{k} 1$

Detta ger att $\sum_{i=1}^{k} 1 = 384 - 382 = 2$, dvs $k = 2$

Svar: Antalet komponenter är 2.

6. (3p) På hur många sätt kan mängden $\{A, B, C, D, 1, 2, 3, \ldots, 12\}$ delas in i tre oetiketterade delmängder så att A och B tillhör olika mängder och så att 1, 2 och 3 också tillhör olika delmängder.

Lösning: Först lägger vi ut elementen 1, 2 och 3 i varsina delmängder. Detta går på ett sätt bara eftersom delmängderna var oetiketterade. Men nu kan vi sätta ut etiketter, etiketten 1 på den delmängd som innehåller ettan etc.

När vi väljer varsina delmängder åt A och B blir antalet möjligheter $3 \cdot 2 = 6$.

Nu återstår de 10 elementen i mängden $\{C, D, 4, 5, 6, \ldots, 12\}$ som vi kan lägga ut lite som det faller sig i de tre olika delmängderna, dvs på totalt 3^{10} olika sätt.

Multiplikationsprincipen ger nu oss

Svar: $6 \cdot 3^{10}$.

7. Betrakta grafen G med noder i de parvis disjunkta mängderna A_1, A_2 och A_3 och en kant mellan noden $x \in A_i$ och noden $y \in A_j$ om och endast om $i \neq j$.

(a) (2p) Under vilka förutsättningar har grafen G en Eulerkrets?

Lösning: Låt v_i beteckna antalet noder i A_i. Valensen hos en nod i A_1 är då $v_2 + v_3$ och similt för noderna i A_2 och A_3. En sammanhängande graf har en Eulerkrets precis då varje nod har en jämn valens. Således:

Fall 1. Om v_1 är ett jämnt tal så finns en Eulerkrets om v_2 och v_3 är jämna tal och bara då.

Fall 2. Om v_1 är ett udda tal så finns en Eulerkrets om v_2 och v_3 är udda tal och bara då.

(b) (2p) Antag att grafen G saknar en Eulerkrets. Under vilka förutsättningar kan man då plocka bort kanter från grafen G så att en Eulerkrets finns i den graf som då återstår?

Lösning: Om grafen saknar en Eulerkrets kommer antingen precis en eller två av mängderna A_i, $i = 1, 2, 3$ att innehåll ett udda antal element.

Fall 1: Mängden A_3 innehåller ett udda antal element, medan A_2 och A_1 innehåller ett jämnt antal element var varav minst en av dessa mängder innehåller minst fyra element, låt oss säga mängden A_2.

Börja med att ta bort alla kanter från A_3 till A_1. Nu har alla noder utom de i A_2 en jämn valens. Nu delar vi in mängden A_2 i två delmängder B_2 och C_2 med vardera ett jämnt antal element, vilket är möjligt emedan A_2 har minst fyra element. Från noden b i A_1 tar vi bort kanterna till noderna i B_2 och från noden c i A_1 kanterna till noderna i C_2. Nu har alla noder en jämn valens. Grafen är fortfarande sammanhängande eftersom varje nod i A_3 har en kant till varje nod i A_2 och varje nod i A_1 har minst en kant till någon nod i A_2, så alla noder i A_1 kan förbindas med alla noder i A_3.

Fall 1spec: Mängden A_3 innehåller ett udda antal element, medan A_2 och A_1 båda innehåller precis två element vardera, $A_1 = \{b_1, c_1\}$ och $A_2 = \{b_2, c_2\}$. Tag bort kanterna mellan b_1 och c_2 resp kanten mellan b_2 och c_1. Alla noder har jämn valens och grafen är sammanhängande (rita!) och det finns en Eulerkrets.

Fall 2: Mängden A_3 innehåller ett jämnt antal element, medan A_2 och A_1 innehåller ett udda antal element var, behandlas analogt. Tag helt enkelt bort alla kanter mellan noderna i A_1 och A_2. Nu har alla noder en jämn valens. Grafen är sammanhängande eftersom varje nod i A_i, för $i = 1, 2$, har en kant till varje nod i A_3.

8. (3p) Låt φ och ψ beteckna nedanstående permutationer:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Undersök om det finns någon permutation x sådan att $x\varphi x^3 = \psi$.

Lösning: Vi skriver först permutationerna φ och ψ som produkter av disjunkta cykler:

$$\varphi = (1\ 4\ 5\ 3)(2\ 6) \quad \text{och} \quad \psi = (1)(2\ 4\ 5)(3\ 6)$$

och därefter som produkter av transpositioner, t ex:

$$\varphi = (1\ 3)(1\ 5)(1\ 4)(2\ 6) \quad \text{resp} \quad \psi = (1)(2\ 5)(2\ 4)(3\ 6).$$

Tydligen är φ en jämn permutation. Oavsett om x är udda eller jämn så kommer $x\varphi x^3$ att vara en jämn permutation, som ju aldrig kan vara lika med den udda permutationen ψ. Det finns ingen permutation x som löser ekvationen.