MATEMATISKA INSTITUTIONEN
KTH
Examinator: Olof Heden
Telefon: 0730 547 891

**Lösningar till tenta A i 5B1204 DISKRET MATEMATIK för D och 5B1203 DISKRET MATEMATIK för F3 och F1spec den 28 mars 2007.**

1. Se studiematerialet.

2. Se studiematerialet.

3. Karakteristiska ekvationen $r^2 = r+30$ har rötterna $r = 5$ och $r = -6$. Rekursionsekvationens allmänna lösning blir då
$$a_n = A \cdot 5^n + B(-6)^n.$$
Nu bestämmer vi $A$ och $B$ så att startvärdena blir uppfyllda:
$$\begin{cases} 1 &= A \cdot 5^0 + B(-6)^0 \\ -27 &= A \cdot 5^1 + B(-6)^1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 &= A + B \\ -27 &= 5A - 6B \end{cases}$$
Ett simpelt linjärt ekvationssytem med l lösningarna
$$A = \frac{-21}{11}, \quad B = \frac{32}{11}.$$
Således

**Svar:**
$$a_n = \frac{-21}{11}5^n + \frac{32}{11}(-6)^n.$$

4. (a) Sambandet $\sum_{i=1}^{|V|} \delta(v_i) = 2 \cdot |E|$, där $|V|$ betecknar antalet noder $v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}$ och $|E|$ antalet kanter, ger
$$18 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 2 \cdot |E|$$
och således är antalet kanter lika med

**Svar:** 37.

(b) En sammanhängande graf med ett minimalt antal kanter är ett träd. Eftersom ett träd med 41 noder innehåller precis 40 kanter kan grafen i fråga inte vara sammanhängande.

(c) Rita först fem noder $v_1, v_2, \ldots, v_5$ och med fem kanter ut från var och en av dessa noder. Låt $v_6$ och $v_7$ vara så uppkomna grannar med $v_1$ resp $v_2$. Koppla ihop $v_6$ och $v_7$ med en kant. Nu har vi en graf med 18 noder med valens 1 och fem noder med valens 4 och två noder med valens 2. Återstår att skapa 16 noder med valens två. Om dess placeras ut på kanter, i den graf vi börjat rita, så får vi en graf som uppfyller de givna förutsättningarna.

5. Vi bestämmer först, med hjälp av Euklides algoritm, den största gemensamma delaren till två av talen t ex 2520 och 2310. Detta eftersom alla gemensamma delare till dessa bägge tal är delare till den största gemensamma delaren till dessa två tal.
$$\begin{aligned} 2520 &= 1 \cdot 2310 + 210 \\ 2310 &= 11 \cdot 210 + 0 \end{aligned}$$
Vi finner att $sgd(2520, 2310) = 210$. Det är lätt att faktorisera 210 i en produkt av primtal:
$$210 = 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5.$$
Nästa steg i vår undersökning är att avgöra vilka av primtalen 2, 3, 5 och 7 som förutom att vara delare till både 2520 och 2310 också är delare till talet 3332. Vi konstaterar lätt att 2 är en delare, 5 inte är en delare och inte heller 3. Men
$$3332 = 7 \cdot 476.$$
Nu vet vi att gemensamma delare till de tre talen är 1, 2, 7 och $2 \cdot 7$.

**Svar:** 1, 2, 7 och 14.

6. (a) Varje duva skall välja ett av $n$ stycken reden och totalt skall $n+k$ stycken duvor göra sådana val. Duvorna väljer rede helt oberoende av hur andra duvor gör sina val. Multiplikationsprincipen ger då

**Svar:** $n^{n+k}$.

(b) Låt $T$ beteckna antalet reden som innehåller två duvor. Då gäller att

$$(1<)k \leq T \leq \frac{n+k}{2}(\leq n).$$

Om precis $T$ stycken reden kommer att innehålla två duvor, så kommer $n+k-2T$ reden att innehålla en duva och resterande reden ingen duva. Först utser vi de reden som skall innehålla två duvor, en duva resp ingen duva. Antal sätt att göra detta på är

$$n_T = \begin{cases} \binom{n}{T,n+k-2T,T-k} & \text{om} \quad 1<k \leq T \leq n \\ 0 & \text{om} \quad T>n. \end{cases}$$

Sen utser vi de duvor som skall flyga till de olika redena. Antalet sätt för detta är

$$m_T = \binom{n+k}{r_1, r_2, \ldots, r_n} \quad \text{där} \quad r_1+r_2+\ldots+r_n = n+k$$

och $T$ stycken av talen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ är 2, $n+k-2T$ stycken av dessa tal är lika med 1 och resterande tal är lika med 0. Detta ger att

$$m_T = \frac{(n+k)!}{2^T}.$$

För varje värde på $T$ är antalet möjligheter lika med

$$n_T \cdot m_T = \binom{n}{T, n+k-2T, T-k} \cdot \frac{(n+k)!}{2^T} \quad \text{om} \quad k \leq n$$

Summerar vi nu för de olika värdena på $T$ får vi

**Svar:** Inga möjligheter om $k>n$ men om $1<k \leq n$ så blir antalet möjligheter lika med

$$\sum_{T=k}^{\lfloor (n+k)/2 \rfloor} n_T \cdot m_T = \sum_{T=k}^{n} \binom{n}{T, n+k-2T, T-k} \cdot \frac{(n+k)!}{2^T}$$

7. Vi börjar med att skriva permutationerna som produkter av disjunkta cykler:

$$\varphi = (1\ 6\ 7\ 4\ 5\ 2\ 3) \quad \text{och} \quad \gamma = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)(4\ 7).$$

Två permutationer är konjugerade precis då de är av samma typ, dvs när de skrivs som en produkt av disjunkta cykler, så överensstämmer cykellängderna hos de två permutationerna. I detta specifika fall så kommer $\varphi$ och $\gamma\psi$ att vara konjugerade permutationer om $\gamma\psi$ består av en 7-cykel.

Från beviset av att permutationer kan indelas i udda och jämna permutationer minns vi att två cykler kan användas för att koppla ihop resp söra på cykler. Så med $\psi = (4\ 5)$ får vi

$$\gamma\psi = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)(4\ 7)(4\ 5) = (1\ 3\ 6\ 2\ 5\ 7\ 4).$$

Med detta val av 2-cykel $\psi$ så består både $\varphi$ och $\gamma\psi$ av en 7-cykel. De är då av samma typ och de är därför konjugerade.

8. (a) Vi betraktar mängden $Q = \{x^2 \mid x \in Z_p\}$. Vi observerar $x^2 = y^2$ precis då $p | x^2 - y^2$. Eftersom $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ så gäller att

$$x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad p|(x-y)(x+y) \quad \Rightarrow \quad p|(x-y) \quad \text{eller} \quad p|(x+y)$$

Vi räknar i ringen $Z_p$ och har då från ovanstående att

$$x - y \equiv_p 0 \quad \text{dvs} \quad x \equiv_p y \qquad \text{eller} \qquad x + y \equiv_p 0 \quad \text{dvs} \quad x \equiv_p -y.$$

Det gäller alltså att $Q$, om $p$ är ett udda primtal, består av de $(p+1)/2$ olika elementen

$$0^2 = 0, 1^2 = (-1)^2, 2^2 = (-2)^2, \ldots, (\frac{p-1}{2})^2 = (\frac{p+1}{2})^2.$$

Ringen $Z_2$ har två jämna kvadrater elementen 0 och 1. Alltså

$$|Q| = \begin{cases} 2 & \text{om} \qquad\qquad\qquad p = 2 \\ \frac{p+1}{2} & \text{om } p \text{ primtal och} \quad p \neq 2. \end{cases}$$

(b) Vi använder oss av att $Z_n$ är isomorf med den direkta produkten av ringar $Z_{p_1} \times Z_{p_2} \times \ldots \times Z_{p_k}$. Vid denna isomorfi gäller att

$$x \quad \longleftrightarrow \quad (x(mod\, p_1), x(mod\, p_2), \ldots, x(mod\, p_k))$$

och speciellt

$$x^2 \quad \longleftrightarrow \quad (x^2(mod\, p_1), x^2(mod\, p_2), \ldots, x^2(mod\, p_k))$$

Låt nu $Q_i$, för $i = 1, 2, \ldots, k$ beteckna kvadraterna i ringen $Z_{p_i}$. Då får vi från ovanstående ekvation att

$$|Q| = |Q_1| \cdot |Q_2| \cdot \ldots \cdot |Q_k|,$$

där $Q$ betecknar kvadraterna i ringen $Z_n$. Således

**Svar:** Antalet kvadrater i ringen $Z_{p_1 p_2 \ldots p_k}$ är lika med

$$|Q| = \begin{cases} \frac{2}{2^{k-1}} \prod_{i=2}^{k} (p_i + 1) & \text{om} \quad p_1 = 2 \\ \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k} (p_i + 1) & \text{om} \quad p_i \neq 2 \text{ för } i = 1, 2, \ldots, k. \end{cases}$$