MATEMATISKA INSTITUTIONEN
KTH
Examinator: Svante Linusson
telefon 790 9444

Svar till Tenta A i 5B1204 DISKRET MATEMATIK för D
7 juni 2006

Max är 27 poäng och 13 räcker säkert för godkänt. Möjlighet att komplettera får den som har 12 poäng. Godkänt på lappskrivningarna 1-3 ger en bonuspoäng per styck.

Skrivtid: 8.00-13.00.
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel tillåtna.
Motivera dina lösningar!!!

1. Bevisa att det finns oändligt många primtal. (3 poäng)

   Svar: Se t.ex. kursboken sidan 52.

2. Formulera och bevisa rekursionen för Stirlingtal av andra slaget $S(n,k)$, inklusive startvärden. (3 poäng)

   Svar: Se t.ex. kursboken sats 12.1.

3. Ge en exakt formel för a_n som ges rekursivt av

$$a_n - 2a_{n-1} - 8a_{n-2} = 0,$$

   med startvärden $a_0 = 0, a_1 = 3$. (3 poäng)

   Svar: Detta är en enkel rutinuppgift. Den karakteristiska ekvationen $x^2 - 2x - 8 = 0$ har lösningar $x = -2, 4$. Den allmänna lösningen är då $a_n = A(-2)^n + B4^n$. Insättning av startvärdena ger ekvationssystemet $A + B = 0, 4B - 2A = 3$, vilket ger $A = -1/2, B = 1/2$. Lösningen är således $a_n = (-2)^{n-1} + 4^n/2$.

4. Nu på fredag börjar VM i fotboll för herrar.

   (a) Sveriges VM-trupp består av 3 målvakter och 20 utespelare. På plan skall det vid start vara 1 målvakt och 10 utespelare som skall väljas bland dessa. På hur många sätt kan förbundskaptenen då sätta ihop laget till en matchstart? (Vi bortser från alla överväganden om skadade spelare, att olika utespelare är olika duktiga på olika positioner etc.) (2 poäng)

   (b) De 32 lag som är med i VM har delats in i 8 grupper (kallade Grupp A,...,Grupp H) med 4 lag i varje grupp. På hur många sätt kan en sådan gruppindelning göras? (OBS 1: Grupperna är namngivna. OBS 2: I praktiken har man en del extra villkor, men det skall du inte ta hänsyn till.) (2 poäng)

   (c) Hur många ord med 3 bokstäver kan man skriva av bokstäverna i FOTBOLLSFEBER?(2 poäng) (Med ¨ord¨ menas här vilken bokstavskombination som helst, det behöver inte vara riktiga svenska ord.)

   Svar:

   (a) Det finns $\binom{3}{1}$ sätt att välja målvakt och $\binom{20}{10}$ sätt att välja utespelare. Multiplikationsprincipen ger att det totalt finns $\binom{3}{1}\binom{20}{10}$ sätt.

   (b) Detta är ett problem av typen att lägga 32 olika saker i 8 olika lådor med exakt 4 i varje låda. Svaret är multinomialkoefficienten $\binom{32}{4,4,4,4,4,4,4,4}$.

   (c) Det finns 2 bokstäver var av F,O,B,L,E och en bokstav var av T,S,R som kan användas. Här finns ingen enkel formel utan vi måste dela in i disjunkta fall som täcker alla möjligheter:
   Fall 1. Ingen bokstav förekommer mer än en gång. Då har vi 8 olika bokstäver att välja mellan

och vi kan välja första bokstaven i ordet på 8 sätt, andra på 7 sätt och tredje på 6 sätt. Totalt $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ ord.
Fall 2. Någon bokstav förekommer 2 gånger. Det finns 5 bokstäver som kan förekomma två gånger. Välj de två platserna för dessa bokstäver på $\binom{3}{2}$ sätt. Sedan kan vi placera in någon av de övriga 7 bokstäverna på den tredje platsen. Multiplikationsprincipen ger $5 \cdot 3 \cdot 7 = 105$ ord i detta fall.

Dessa fall ger alla möjligheter och totalt blir det $336 + 105 = 441$ ord.

5. Själva bollen i årets VM kallas ¨Teamgeist¨ och ser mycket annorlunda ut än den klassiska fotbollen. Fotbollen Teamgeists yta är ihoplimmad av ett antal delar. Det finns två sorters delar, låt oss kalla dem A och B. Varje A-del har gemensam kant med 3 andra A-delar och med 3 B-delar. Varje B-del har gemensam kant med 4 andra delar. Ingenstans på fotbollen möts fyra eller fler delar i en punkt, utan högst tre. Hur många B-delar finns det på fotbollen? (Tips: Använd Eulers sats om plana grafer.)
OBS! Av din lösning måste framgå varför informationen ovan räcker för att avgöra detta. Det räcker inte med att rita något specialfall om hur bollen kanske ser ut. (3 poäng)

   Svar: Vi skapar en graf $G = (V, E)$ på följande sätt. Varje del av fotbollen är en nod och vi drar en kant mellan två noder om de har en gemensam kant på fotbollen (detta kallas ofta den duala grafen). Detta är en plan graf då den kan ritas på sfären. Villkoret att högst 3 delar möts i någon punkt på fotbollen betyder att varje område som grafen delar in svären i har exakt 3 kanter som begränsar det. Om vi låter $r =$antal områden, $e =$antal kanter och $v =$antal noder i G så betyder det att $3r = 2e$, ty varje kant gränsar till två områden (räkna kant-område par på två sätt). Låt $a =$antal delar av typ A och $b =$antal delar av typ B på Teamgeist. Eulers sats för plana grafer säger att $v - e + r = 2$. Detta blir nu $2 = a + b - e + 2e/3 = a + b - e/3$.

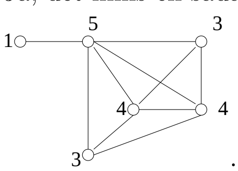
   Informationen i uppgiften ger med hjälp av handskakningslemmat att $6a + 4b = 2e$. Detta insättes i ovanstående och vi får $2 = a + b - (3a + 2b)/3 = b/3$. Vi kan alltså dra slutsatsen att $b = 6$, så det finns 6 B-delar. (Antalet A-delar på den riktiga Teamgeist är 8, men det kan inte säkert bestämmas utifrån informationen i uppgiften, t.ex. $a = 0$ är också en lösning.)

6. Avgör för vart och ett av dessa fall (med motivering) om det finns en graf med 6 noder som har dessa valenser: (a) 1,1,2,3,4,5 (b) 1,3,3,4,4,5 (c) 1,1,2,3,4,4
(Liksom boken antar vi att det inte finns öglor (loops) eller multipla kanter.) (3 poäng)

   Svar:

   (a) Nej! Antag att det fanns en sådan graf G. En nod x skall då valens 5 och således kanter till alla andra noder. Två noder y, z har valens 1 och således inga andra kanter än dem till x. Det gör att de övriga 3 noderna i G inte kan ha kanter till y eller z och således har de valens högst 3. En motsägelse eftersom någon nod skall ha valens 4.

   (b) Ja, det finns en sådan graf. T.ex.

   .

   (c) Nej! Antalet udda noder är udda vilket är en omöjlighet enligt handskakningslemmat.

7. Låt $\alpha, \beta \in S_5$ vara givna av $\alpha = (14)(253), \beta = (123)(45)$. Bestäm ett $\tau \in S_5$ sådant att $\tau\alpha\tau^{-1} = \beta$. (3 poäng)

   Svar: Permutationerna α och β är konjugerade då de har samma cykelstruktur och alltså finns ett sådant τ som efterfrågas. Vi definierar τ genom att para ihop varje cykel c i α med en cykel av sama längd d i β. Elementen i c avbilds sedan på elementen i d i samma ordning. Detta kan göras på flera olika sätt. Ett sätt är att $\tau(1) = 4, \tau(4) = 5, \tau(2) = 1, \tau(5) = 2, \tau(3) = 3$.

8. Visa att $5x^4 + 27y^2 + 1 = 0$ saknar heltalslösningar x, y. (Tips: räkna modulo lämpligt heltal) (3 poäng)

   Svar: Räkna modulo 5. Vi får villkoret $2y^2 + 1 \equiv_5 0$. Vi gör en tabell över möjliga värden modulo 5:

$y \pmod 5$	$2y^2 \pmod 5$	$5x^4 + 27y^2 + 1 \pmod 5$
0	0	1
1	2	3
2	3	4
3	3	4
4	2	3

Varje heltalslösning är också en lösning modulo 5. Eftersom det enligt tabellen ovan saknas lösningar modulo 5 så finns det inga heltalslösningar alls.