Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2005-09-19, kl. 08.00–10.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BDMP.

Kontrollskrivning 1! Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 2) Vi vill lösa differentialekvationen

$$t^2\,\frac{d^2y}{dt^2} - t\,\frac{dy}{dt} + \frac{3}{4}\,y = t^{5/2}, \qquad (0 < t < +\infty)$$

fullständigt. Till vår hjälp har vi följande information. Den associerade differentialekvationen

$$t^2\,\frac{d^2y}{dt^2} - t\,\frac{dy}{dt} + \frac{3}{4}\,y = 0, \qquad (0 < t < +\infty)$$

har de två lösningarna

$$y_1(t) = \sqrt{t}, \qquad y_2(t) = t\,\sqrt{t}.$$

Verifiera att dessa verkligen löser den associerade differentialevationen, samt utnyttja detta för att lösa den ursprungliga differentialekvationen.

Vi skriver först DE på standardform:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\,\frac{dy}{dt} + \frac{3}{4t^2}\,y = t^{1/2}, \qquad (0 < t < +\infty).$$

Vi använder metoden med parameter-variation, och skriver

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2.$$

Vi behöver Wronskianen, som beräknas till

$$W = y_1y_2' - y_2y_1' = t.$$

Enligt parametervariationsmetoden skall vi lösa

$$u_1' = -\frac{y_2f(x)}{W}, \qquad u_2' = \frac{y_1f(x)}{W}.$$

Härvid är $f(x)$ HL i den normaliserade ekvationen ovan, och vi får $f(x) = t^{1/2}$, och

$$u_1' = -t, \qquad u_2' = 1,$$

så att vi kan välja

$$u_1 = -t^2/2 \quad \text{och } u_2 = t.$$

Detta ger partikulärlösningen

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = \frac{1}{2}\,t^{5/2}.$$