

Kontrollskrivning, 2005-10-27, kl. 08.00–10.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BDMP.

Kontrollskrivning 1! Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 2) Vi vill lösa differentialekvationen

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - 3t \frac{dy}{dt} + 4y = 0, \quad (0 < t < +\infty)$$

fullständigt. Till vår hjälp har vi följande information. En lösning finns på formen

$$y_1(t) = t^\alpha,$$

där konstanten α återstår att bestämma.

Vi ser först att

$$y_1' = \alpha t^{\alpha-1}, \quad y_1'' = \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2},$$

så att när vi stoppar in i DE erhålls

$$\alpha(\alpha-1) - 3\alpha + 4 = 0.$$

Denna andragsradsekvation har dubbelroten $\alpha = 2$. Vi får alltså att $y_1(t) = t^2$. Vi letar efter ytterligare en lösning på formen $y_2 = y_1 u = t^2 u(t)$, enligt metoden "reduktion av ordning". Vi finner att

$$y_2' = 2t u + t^2 u', \quad y_2'' = 2u + 4t u' + t^2 u'',$$

vilket instoppas i DE och vi får:

$$t u'' + u' = 0,$$

dvs

$$(t u')' = 0.$$

Detta betyder att $t u'$ är konstant, och vi väljer denna till 1:

$$t u' = 1.$$

Denna ekvationen har en lösning som är $u = \ln t$. Vi finner att ett val av y_2 blir

$$y_2(t) = t^2 \ln t.$$

Den allmänna lösningen till DE blir nu:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 t^2 + C_2 t^2 \ln t,$$

där C_1, C_2 är två fria konstanter.