Kontrollskrivning, 2005-11-07, kl. 08.00–10.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BDPM.

Kontrollskrivning MODUL 4. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 4) Betrakta systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha y + 7 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 5y - 13. \end{cases}$$

Finn de kritiska punkterna för systemet (i termer av parametern α, som antas vara nollskild). Lös systemet explicit. Rita sedan fasdiagram som beskriver hur systemet beter nära den kritiska punkten (eller de kritiska punkterna), och inkludera en stabilitetsanalys.

Vi börjar med de kritiska punkterna, och löser

$$\begin{cases} \alpha y + 7 = 0 \\ 2x + 5y - 13 = 0. \end{cases}$$

Detta har lösningen

$$\begin{cases} x = \dfrac{13}{2} + \dfrac{35}{2\,\alpha} \\ y = -\dfrac{7}{\alpha}, \end{cases}$$

så att vi får en enda kritisk punkt $(\frac{13}{2} + \frac{35}{2\alpha}, -\frac{7}{\alpha})$. Vi skriver systemet på vektorform:

$$X' = AX + B,$$

där

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Eftersom vektorn B är konstant, kan vi välja som partikulärlösning den kritiska punkten:

$$X_p = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{2} + \dfrac{35}{2\alpha} \\ -\dfrac{7}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Den allmänna homogena lösningen får vi genom att först lösa den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda - 2\alpha = 0;$$

rötterna till denna är

$$\lambda_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + 2\alpha}, \qquad \lambda_2 = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} + 2\alpha}.$$

Vi har motsvarande egenvektorer

$$K_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger den allmänna homogena lösningen

$$X_h = c_1\,K_1\,e^{\lambda_1 t} + c_2\,K_2\,e^{\lambda_2 t},$$

där c_1, c_2 är två godtyckliga reella parametrar. Den allmänna lösningen till vårt inhomogena problem är således

$$X = X_p + X_h = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} + \frac{35}{2\alpha} \\ -\frac{7}{\alpha} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}.$$

Om $\alpha > 0$ blir ett egenvärde positivt och det andra negativt, så vi får en sadelpunkt. Om

$$-\frac{25}{8} < \alpha < 0$$

blir båda egenvr̈dena positiva, och vi får en instabil nod. Om istället $\alpha < -25/8$ får vi komplexa egenvr̈den med positiv realdel och således en instabil spiral. De degenererade fallen $\alpha = 0$ samt $\alpha = -25/8$ behöver ej klassificeras för godkänt betyg på uppgiften.