Kontrollskrivning, 2005-11-07, kl. 08.00–10.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BDPM.

Kontrollskrivning MODUL 5. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 5) Lös vågekvationen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & 0 < x < \pi, \ 0 < t < +\infty, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t < +\infty, \\ u(x,0) = \sin(5x), & 0 < x < \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(3x) - \sin(7x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Tillämpning av variabelseparationsmetoden ger att den allmänna lösningen bör sökas på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big\{ a_n \sin(nx)\cos(nt) + b_n \sin(nx)\sin(nt) \Big\},$$

där koefficienterna a_n och b_n återstår att bestämma. Instoppning av $t = 0$ ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx),$$

och eftersom detta skall vara lika med $\sin(5x)$ måste $a_5 = 1$ medan alla andra a_n är lika med noll. Vi deriverar $u(x,t)$ partiellt med avseende på t och får

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big\{ -n\,a_n \sin(nx)\sin(nt) + n\,b_n \sin(nx)\cos(nt) \Big\},$$

så att

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,b_n \sin(nx).$$

Detta skall vara lika med

$$\sin(3x) - \sin(7x),$$

vilket kräver att

$$b_3 = \frac{1}{3}, \qquad b_7 = -\frac{1}{7},$$

medan alla andra b_n är lika med noll. Vår sökta lösning blir alltså:

$$u(x,t) = \sin(5x)\cos(5t) + \frac{1}{3}\sin(3x)\sin(3t) - \frac{1}{7}\sin(7x)\sin(7t).$$