Dagens teman

- Linjära ODE av godtycklig ordning.
  Lösningarnas struktur. (ZC4.1)

- Linjära ODE av godtycklig ordning med
  konstanta koefficienter. Homogena. (ZC4.3)

- Linjära ODE av godtycklig ordning med
  konstanta koefficienter. Inhomogena.
  Variation-av-parametermetoden. (ZC4.6)

Linjära ODE av godtycklig ordning:

ZC 4.1

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots a_1 y' + a_0 y = \begin{cases} g(x). & \text{Allmänna fallet, (A)} \\ 0. & \text{Homogena fallet, (H)} \end{cases}$$

Superpositionsegenskaper:

- y_1 och y_2 lösningar till (H)
  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ lösningar till (H) för godtyckliga konstanter c_1 och c_2.

- y_1 och y_2 lösningar till (A)
  $y = y_1 - y_2$ lösning till (H).

- Om (H) har *reella* koefficienter:
  $y = u + \mathrm{i}v$ (u och v reella) en komplex lösning till (H) $\Leftrightarrow$
  u och v lösningar till (H).

Lösningmängdernas struktur:

- Allmän lösning till (H):

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

  där $y_1, y_2, \ldots, y_n$ är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och
  där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är godtyckliga konstanter.

- Allmän lösning till (A):

$$y = y_p + y_h$$

  där y_p är någon (vilken som helst) lösning till (A) och y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Definition av ”linjärt oberoende funktioner”:

n st funktioner $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ är *linjärt oberoende* på ett intervall I om likheten

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \qquad (*)$$

för alla x i intervallet I, c:na konstanter,

är uppfylld endast om c:na alla är = 0.

Motsatsen ”linjärt beroende funktioner” innebär att likheten $(*)$ uppfylls med några av c:na $\neq 0$.

Detta är ekvivalent med att minst en av y-funktionerna är en linjär kombination till de andra, ex.vis

$$y_1(x) = d_2 y_2(x) + \dots + d_n y_n(x)$$

Två funktioner är linjärt beroende om och endast om den ena av dem är en konstant multipel av den andra.

Wronskis testförfarande

Om n st funktioner

$$y_1(x), y_2(x), \dots , y_n(x),$$

alla är lösningar till ekvationen

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots a_1 y' + a_0 y = 0,$$

där a:na är kontinuerliga funktioner av x i ett intervall I,

så är de linjärt oberoende i detta intervall om och endast om determinanten

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

för något x i intervallet.

För ekvationer med konstanta koefficienter:

ZC 4.3

- Karakteristisk ekvation (”Auxiliary Equation”):

$$m^n + a_{n-1}m^{(n-1)} + \ldots a_1 m + a_0 = 0. \qquad \text{(K)}$$

- Rötternas relation till ODE:ns lösningar:

  Om m_o är en rot med multiplicitet α till (K) så är

$$y = q(x)\cdot e^{m_o x},$$

  där q är ett godtyckligt polynom av grad högst α – 1, lösning till (H).

- Den allmänna lösningen till (H) erhålls genom att man summerar alla lösningarna, som enligt föregående punkt finns för de olika rötterna till (K).

Variation-av-parameter-metoden ZC 4.6

Lösning av inhomogen ekvation med hjälp av den fullständiga lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Låt

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

vara den allmänna lösningen till

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Väljer man funktioner

$$u_1(x), u_2(x), \dots u_n(x),$$

så att

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ \vdots \\ u_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix},$$

så kommer

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$$

att vara en partikulärlösning till

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Koefficienterna $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ och f förutsätts vara kontinuerliga funktioner av x i det betraktade intervallet.