Dagens teman

- Repetition
  1:a ordningens differentialekvationer
  (ZC 1 – 2.2)
- Linjära ekvationer av ordning 1. (ZC 2.3)

- **Typisk ODE av ordning 1**

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

- med begynnelsevillkor: $y(x_0) = y_0$ (ZC1.2)

Viktig sats: Existens o entydighetssatsen (Th1.1)

> Om $f(x, y)$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ är kontinuerliga så har begynnelsevärdesproblemet:
>
> $$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$$
>
> en och endast en lösning $y(x)$ i varje fall i någon omgivning av $x = x_0$.

Separabla ekvationer

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

Lösningsförfarande:

Ekvationen är ekvivalent med att

$y = a$, konstant, där a är 0-ställena till $g(y)$

eller att

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Autonoma ekvationer

$$y' = f(y)$$

- Om $f(y_0) = 0$, så är konstanten $y(t) = y_0$ en lösning

  Sådana lösningar kallas *jämviktslösningar*.

- Låt $f(y_0) = 0$ och $\neq 0$ i någon omgivning av y_0.

  Då är jämviktlösningen y_0 *stabil* om $f(y)$ växlar tecken + 0 – vid y_0. Annars är den *instabil*

- Enkelt testförfarande:

  $f(y_0) = 0$ och $f'(y_0) < 0$ $\qquad$ y_0 stabil

  $f(y_0) = 0$ och $f'(y_0) > 0$ $\qquad$ y_0 instabil

Linjära ekvationer (ZC 2.3)

$$y'(x) + P(x)\,y(x) = f(x) \qquad (*)$$

Lösningsförfarande:
(”integrerande-faktor-metoden”)

1. Multiplicera ekv (*) med faktorn

$$k(x) = \exp\left(\int^{x} P(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Vänster led i ekvationen kommer då, eftersom

$$k'(x) = k(x)\,P(x),$$

att ha formen

$$k(x)y'(x) + k'(x)\,y(x) = (k(x)\,y(x))'$$

2. Integration av ekvationen

$$(k(x)\,y(x))' = k(x)\,f(x)$$

ger sedan

$$y(x) = \frac{1}{k(x)} \int^{x} k(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

(Funktionen $k(x)$ kallas en *integrerande faktor*. Pga integrationskonstanten finns det alltid oändligt många sådana – det räcker förstås att man väljer en av dem.)