Dagens tema
(ZC8.1 – 2)

Linjära ODE-system av ordning 1:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t), \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t), \end{cases}$$

där a-koefficienterna och f:en antas vara kontinuerliga funktioner av t i ett intervall I. (En möjlighet är då förstås att de är konstanta.)

På matrisform kan sådana skrivas:

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{AX}(t) + \boldsymbol{f}(t).$$

Homogena system $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, (H)
Allmänna system $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}$ ”godtyckligt”. (A)

Vid *begynnelsevärdesproblem* är dessutom de n obekanta funktionernas värden kända i en ”begynnelsepunkt” $t = t_0$:

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0.$$

Existens- och entydighetssats (ZC, Th 8.1):

Om koefficienterna och HL i ekvationen

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

är kontinuerliga i ett intervall, så kommer begynnelsevärdesproblemen (med begynnelsepunkten i intervallet) att ha en och endast en lösning i det intervallet.

Superpositionsegenskaper: (ZC 8.1)

- $\boldsymbol{X}_1$ och $\boldsymbol{X}_2$ lösningar till (H)
  $\boldsymbol{X} = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2$ lösningar till (H) för godtyckliga konstanter c_1 och c_2. (Th 8.2)

- $\boldsymbol{X}_1$ och $\boldsymbol{X}_2$ lösningar till (A)
  $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2$ lösning till (H).

- Om (H) har *reella* koefficienter:

  $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U} + \mathrm{j}\boldsymbol{V}$ ($\boldsymbol{U}$ och $\boldsymbol{V}$ reella) en komplex lösning till (H) $\Leftrightarrow$
  $\boldsymbol{U}$ och $\boldsymbol{V}$ lösningar till (H).

Lösningmängdernas struktur: (ZC 8.1)

- Allmän lösning till (H): (Th 8.5)

$$\boldsymbol{X}_h = c_1\boldsymbol{X}_1 + c_2\boldsymbol{X}_2 + \dots + c_n\boldsymbol{X}_n,$$

  där $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_n$ är n st *linjärt oberoende* lösningar till (H) och
  där $c_1, c_2, \dots, c_n$ är godtyckliga konstanter.
- Allmän lösning till (A): (Th 8.6)

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_p + \boldsymbol{X}_h$$

  där $\boldsymbol{X}_p$ är någon (vilken som helst) lösning till (A) och $\boldsymbol{X}_h$ är den allmänna lösningen till mot-svarande homogena ekvation.

Kriterium för linjärt oberoende. ZC Th 8.3

Om n st (vektor-)funktioner

$$\boldsymbol{X}_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{X}_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix},$$

alla är lösningar till det homogena systemet

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{AX}(t),$$

där a:na är kontinuerliga funktioner av t i ett intervall I,

så är de linjärt oberoende i detta intervall om och endast om determinanten W för matrisen

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

är $\neq 0$ för något t i intervallet.

Dessutom: Om $W = \det(\Phi)$ är $\neq 0$ för något t i intervallet, så är W också $\neq 0$ för alla övriga punkter i intervallet.

En sådan uppsättning av systemets lösningar kallas en *fundamentalmängd av lösningar* och matrisen Φ är en *fundamentalmatris*.

En lösningsmetod (*egenvärdesmetoden*) för *homogena* system med *konstanta* koefficienter

(ZC 8.2)

Metoden bygger på ansatsen:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}\, e^{\lambda t},$$

där $\boldsymbol{k}$ är en konstant vektor $\neq \mathbf{0}$ och λ en konstant skalär (reell eller komplex).

Ansatsen leder till följande villkor på λ:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

dvs. till polynomekvationen

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(*Egenvärdesekvationen*, *karakteristiska ekvationen*, λ-rötterna kallas *egenvärden*.)

Och följande villkor på $\boldsymbol{k}$:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{k} = \mathbf{0}, \text{ dvs.}$$

det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

($\boldsymbol{k}$-lösningarna $\neq \mathbf{0}$ kallas *egenvektorer*).

Med hjälp av egenvärdesbestämningar kan alltid n st linjärt oberoende lösningar till (H) bestämmas. Typiska exempel:

(i) ZC 8.2, ex.2 (reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

(ii) ZC 8.2, ex. 6 (icke-reella enkla rötter till egenvärdesekvationen),

och de mera ”ovanliga” fallen:

(iii) ZC 8.2, ex. 3 – 5 (multipla rötter till egenvärdesekvationen).

Multipelrotsfallen:

För dubbelrötter (λ_0) till egenvärdesekvationen kan man visa att det alltid finns två linjärt oberoende lösningar av formen

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{k}_1 t + \boldsymbol{k}_0)\, e^{\lambda_0 t},$$

där $\boldsymbol{k}_1$ och $\boldsymbol{k}_0$ är konstanta vektorer. Dessa kan bestämmas ur sambanden:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^2 \boldsymbol{k}_0 = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{k}_1 = (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \boldsymbol{k}_0. \end{cases} \qquad \text{(ZC, sid 382)}$$

Allmänt, för rötter av multiplicitet m så fungerar en liknande ansats med ett polynom av grad $m - 1$ som koefficient för $e^{\lambda_0 t}$,

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{k}_{m-1} t^{m-1} + \ldots + \boldsymbol{k}_1 t + \boldsymbol{k}_0)\, e^{\lambda_0 t}.$$

[Villkoren som bestämmer $\boldsymbol{k}$-vektorerna lyder då

$$\begin{cases} (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^m\, \boldsymbol{k}_0 = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{k}_\nu = \dfrac{1}{\nu}\, (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \mathbf{I})\, \boldsymbol{k}_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m-1. \end{cases}$$

(ZC, sid 383, behandlar trippelrotsfallet)]