Dagens tema

- Mer om linjära system med konstanta koeff.

$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$:

Fasplan(-rum), trajektorier, fasporträtt

(ZC sid 377-8, ZC10.2)

Definitioner:

Lösningarna $\boldsymbol{X}(t)$ till ett system av differentialekvationer av format $n \times n$, kan uppfattas som en med variabeln (tiden) t vandrande punkt i rummet $\mathbf{R}^n$, ($\boldsymbol{X}(t)$ anger en ”kurva på parameterform”).

Detta rum är då systemets *fasrum* (*fasplan* om $n = 2$) och den kurva som punkten beskriver är lösningens *trajektoria* (eller *bana*). Mängden av alla trajektorier utgör ekvationens *fasporträtt*.

Konstantlösningar motsvarar då lösningar vars trajektorier består av en punkt. Dessa lösningar kallas systemets *jämviktslösningar* och trajektorian är en *jämviktspunkt*.

Om systemdeterminanten $\neq 0$, så finns bara en jämviktslösning, den ”triviala” $\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$.
Om det $\boldsymbol{A} = 0$, så finns det flera.

Kvalitativa egenskaper hos plana system:

För fallet $n = 2$ är de möjliga fasporträtten (bortsett från linjära deformationer – töjningar, vridningar, skuvningar) inte särskilt många. Systemmatrisens egenvärden avslöjar i de flesta fallen vilken typ det av fasporträtt det är fråga om. Man har

	Egenvärden λ_1 och λ_2	Typ av porträtt
1.	olika, reella ≠ 0 och har samma tecken	Nod
2.	reella ≠ 0 och har olika tecken	Sadel
3.	icke-reella, konjugerat komplexa, med realdel ≠ 0	Spiral
4.	icke-reella, konjugerat komplexa, med realdel = 0	Centrum

Fallen då egenvärdena är reella och lika eller om någon av dem = 0 brukar kallas *degenerarade* (Jmfr ZC Fig 10.14). Då behöver man information om egenvektorerna också för att kunna bestämma typen.

Stabilitet (för linjära system):

1. En jämviktpunkt $\boldsymbol{X}_0$ till ett linjärt system kallas *asymptotiskt stabil* om *alla* lösningar $\boldsymbol{X}(t) \to \boldsymbol{X}_0$, då $t \to \infty$. (Detta är den stabilitet som beskrivs i ZC sid 448 (*i*).)

2. En jämviktpunkt $\boldsymbol{X}_0$ kallas *instabil* om det finns *någon* lösning $\boldsymbol{X}(t)$, för vilken $|\boldsymbol{X}(t)| \to \infty$, då $t \to \infty$.

3. En jämviktpunkt $\boldsymbol{X}_0$ kallas *stabil* om det för varje lösning $\boldsymbol{X}(t)$ finns en konstant M sådan att $|\boldsymbol{X}(t)| < M$ då $t > 0$.
(Detta kallas ”locally stable” i ZC på sidan 448: (*i*) och (*ii*).)

Intuitivt betyder detta att den rörliga punkten som lösningen beskriver inte avlägnar sig ”så värst mycket” från jämviktpunkten.