Dagens tema

- Fasplan(-rum), fasporträtt, stabilitet (forts.)
  (ZC sid 377-8, ZC10.2)

- Om högre ordnings system
  (Arbetsmaterial nr 1)

Egenvärdena avslöjar också i de flesta fall stabilitetsegenskaperna:

	Egenvärden λ_1 och λ_2	Jämviktlösningen är
5.	någon av realdelarna > 0	instabil
6.	alla realdelarna < 0	asymptotiskt stabil
7.	realdelarna $= 0$, imaginärdelarna $\neq 0$	stabil, ej asymptotiskt stabil

Degenererade fall har man då minst ett av egenvärdena = 0. I motsats till fallen som räknas i tabellen har man då flera jämviktspunkter. Dessa är aldrig asymptotiskt stabila. För att kunna avgöra om instabilitet råder eller inte kan information om antalet egenvektorer behövas.

Generellare: För $n \times n$-system gäller

Om bland egenvärdena	Så är jämviktlösningen
någon av realdelarna > 0	instabil
alla realdelarna < 0	asymptotiskt stabil

I 2×2-fallet kan egenskaperna i vänsterkolumnen i tabellerna bestämmas direkt ur systemmatrisens determinant Δ och summan τ av dess båda huvud-diagonalelement, dess *spår* (eng. *trace*).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Delta = ad - bc, \tau = a + d.$$

Egenvärdesekvationen är

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0,$$

dvs. τ = summan av egenvärdena,

Δ = produkten av egenvärdena

och rötterna är

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}.$$

Här avläses ex.vis:

$$\begin{array}{lcl}
\text{Icke-reella egenvärden} & \Leftrightarrow & \tau^2 - 4\Delta < 0, \\
\left.\begin{array}{l}\text{Två reella egenvärden} \\ \text{med samma tecken}\end{array}\right\} & \Leftrightarrow & 0 < 4\Delta < \tau^2. \\
\left.\begin{array}{l}\text{Två reella egenvärden} \\ \text{med olika tecken}\end{array}\right\} & \Leftrightarrow & \Delta < 0. \\
\text{Något egenvärde} = 0 & \Leftrightarrow & \Delta = 0. \\
\text{Realdelarna} < 0 & \Leftrightarrow & \Delta > 0 \text{ och } \tau < 0.
\end{array}$$

(ZC Sammanfattande figur 10.18)

Högre ordnings system

Varje system av differentialekvationer av högre ordning är ekvivalent med ett 1:a ordningens system.

Konstgrepp:

Om systemet innehåller funktionen $\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$ så införs nya obekanta funktioner

$$x_1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$x_2 = x_1{}', \qquad \left(= \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

$$x_3 = x_2{}', \qquad \left(= \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1} = x_{n-2}{}', \qquad \left(= \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

Dessa ekvationer tillförs systemet, sedan ersätts alla förekomster av derivatorna upp till ordning n – 1 med dessa nya funktioner och n:te derivatan med 1:a-derivatan $x_{n-1}{}'$.