Dagens tema

- Fourierserier (forts) (ZC11.2, 11.3)

  Funktioner definerade i godtyckliga begränsade intervall

  Fourierserier och differentialekvationer

  Sinus- resp. cosinusutvecklingar

Viktig observation:

Summan i högerledet i relationen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ \pi < x < \pi,$$

är en 2π-periodisk funktion och därför definierad även utanför intervallet $\pi < x < \pi$ men behöver där inte vara = $f(x)$. Sett som funktioner på *hela* reella tallinjen är funktionerna i väster och höger led *olika*.

Om $f(x)$ själv skulle vara 2π-periodisk, kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar så överens-stämmer höger och vänster led för alla x.

Skalning av x-axeln ger: (ZC Def 11.5)

Fourierserier för funktioner $f(x)$ i intervall $-p \le x \le p$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p}\right),$$

där $$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} \, dx, \qquad n = 0, 1, 2\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Allmännare: För $f(x)$ def i intervall I av längd L:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{L}\right),$$

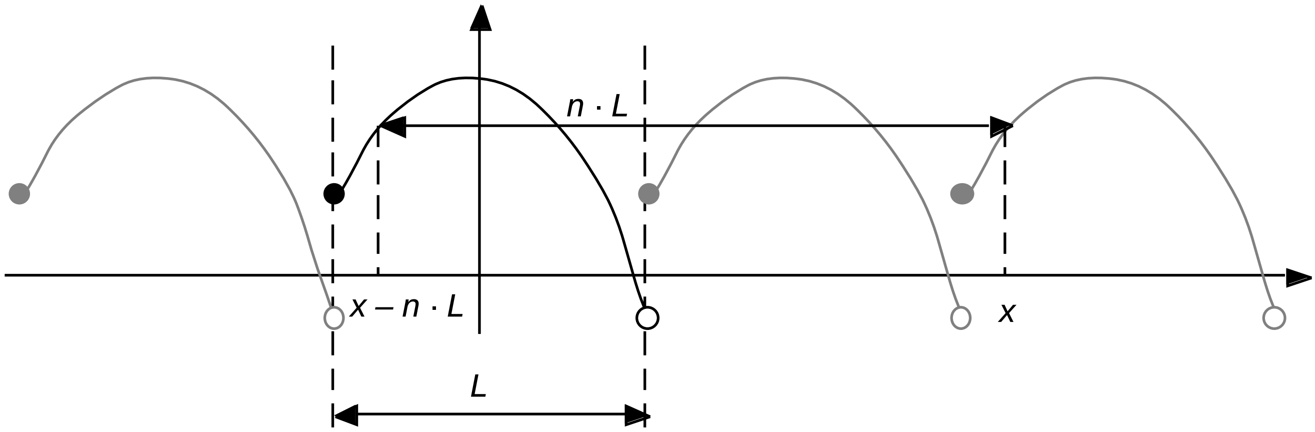
där $$a_n = \frac{2}{L} \int_{I} f(x) \cos \frac{2n\pi}{L} \, dx, \qquad n = 0, 1, 2\ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{I} f(x) \sin \frac{2n\pi}{L} x \, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Periodiska fortsättningar av funktioner

Definition:

Om $f(x)$ är definierad i intervall av längd L, så är den *L-periodiska fortsättningen av $f(x)$*:



$$f_L(x) = f(x - nL), \quad \text{då } nL \leq x < (n+1)L,$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Konvergenssats (ZC Th 11.1)

Om $f(x)$ är L-periodisk, styckvis kontinuerlig och styckvis deriverbar så är (den L-periodiska) fourierserien för f =

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

(Detta medelvärde = $f(x)$ i kontinuitetspunkterna.)

Konvergenssats med avseende på funktionsnorm:

Om $f(x)$ är $2p$-periodisk så gäller för de trunkerade serierna

$$S_N(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x\right),$$

att

$$\int_{-p}^{p} |f(x) - S_N(x)|^2 \, \mathrm{d}x \to 0, \text{ då } N \to \infty.$$

För detta behöver man bara förutsätta om f att $|f(x)|^2$ är integrabel över en period,

$$\int_{-p}^{p} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Utveckling av udda resp jämna funktioner

Fourierserier för *jämna* funktioner $f(x)$ i $-p \le x \le p$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x,$$

där $$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} \, \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Fourierserier för *udda* funktioner $f(x)$ i $-p \le x \le p$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p},$$

där $$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x \, \mathrm{d}x, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Jämna utvecklingar

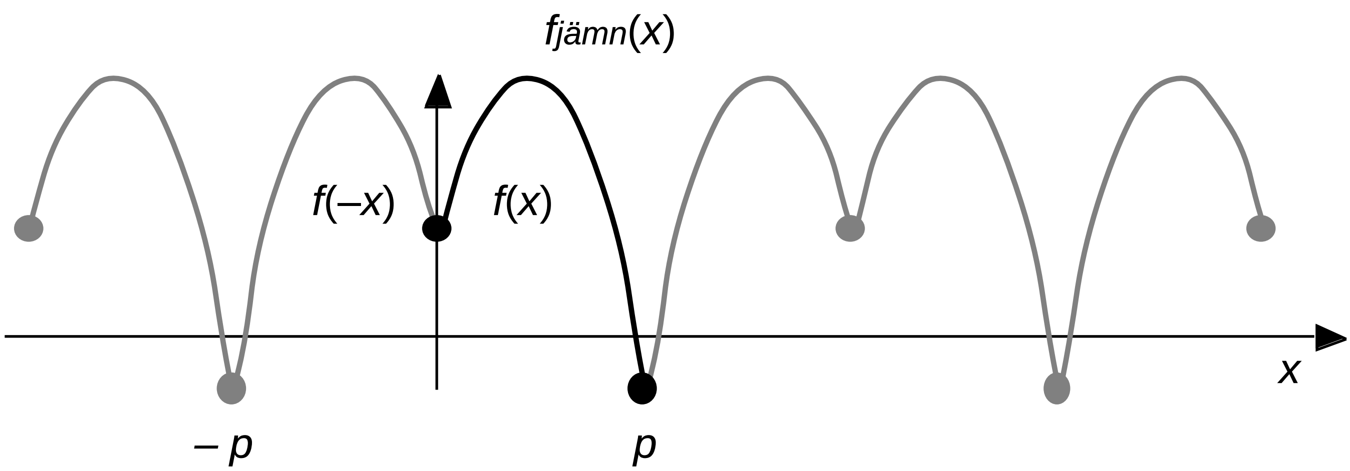
"Half-Range Expansions", ZC sid 499

Definition:

Om $f(x)$ är definierad i intervallet $0 \le x \le p$, så kallas den $2p$-periodiska fortsättningen av:

$$\begin{cases} f(x), & \text{då } 0 \le x \le p, \\ f(-x), & \text{då } -p \le x \le 0, \end{cases}$$

den ***jämna*** *periodiska fortsättningen av* $f(x)$. Nedan betecknas den $f_{jämn}$.



Fourierserieutvecklingen blir

$$f_{jämn}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p} \, ,$$

där $\quad a_n = \dfrac{2}{p} \displaystyle\int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} \, dx \, , \; n = 0, 1, 2, \ldots$

Man säger att man utvecklat $f(x)$, $0 \le x \le p$, i *cosinusserie*.

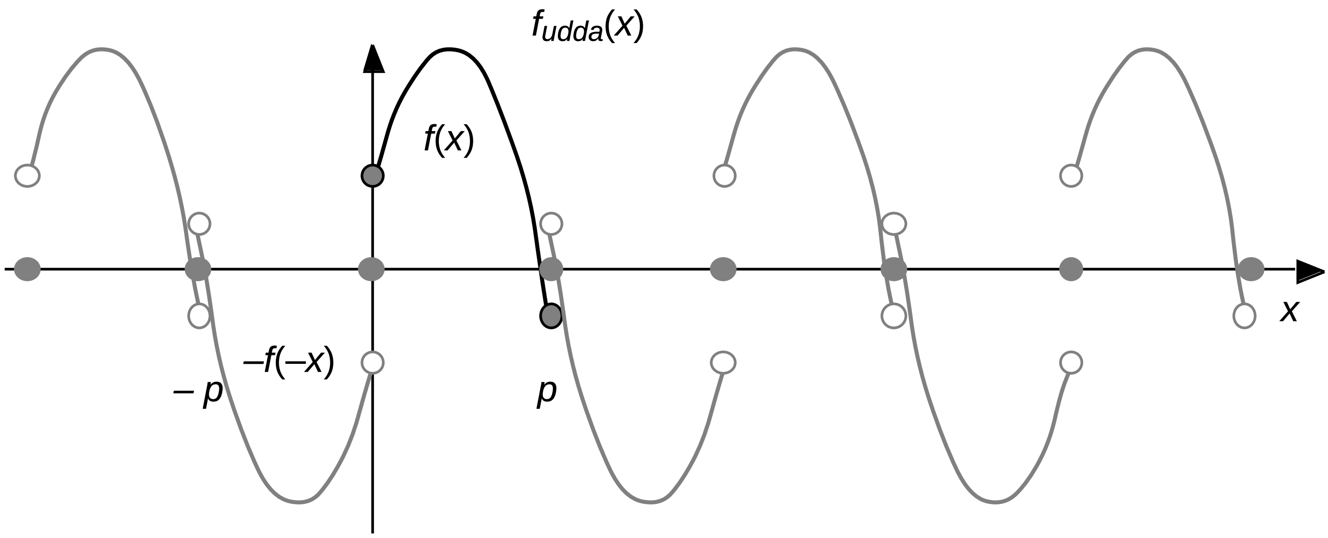
Udda utvecklingar

Definition:

Om $f(x)$ är definierad i intervallet $0 \le x \le p$, så kallas den $2p$-periodiska fortsättningen av:

$$\begin{cases} f(x), \text{ då } & 0 < x < p, \\ -f(-x), \text{ då } & -p < x < 0, \\ 0, \text{ då } & x = np, \end{cases}$$

den ***udda*** *periodiska fortsättningen av* $f(x)$.
Nedan betecknas den f_{udda}.



Fourierserieutvecklingen blir

$$f_{udda}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \ ,$$

där $\qquad b_n = \dfrac{2}{p} \displaystyle\int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} \, dx \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots$

Man säger att man utvecklat $f(x)$, $0 \le x \le p$, i *sinusserie*.