Dagens teman

- Fourierserier (forts)
  Ett räkneexempel om ”Half-Range Expansion” (ZC 11.3)

- Partiella differentialekvationer (PDE)

  ”Klassiska” separabla ekvationer (ZC12.1, 12.2)

”Klassiska” partiella differentialekvationer

Värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

Förekommer bl.a. i problem om värmeledning och diffusion.

Vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Förekommer bl.a. i problem om vågutbredning i gaser och vätskor (t.ex. ljud), om elektromagnetiska vågor (ljus, radiovågor …).

Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Förekommer bl.a. i problem angående stationära värmefördelningar, elektriska och magnetiska potentialer, stationära strömningar.

I den här kursen begränsar vi oss till fallen då u beror av två variabler,

$u(x, t)$ i värmelednings- och vågekvationerna (”en-dimensionella fallen”) och

$u(x, y)$ för Laplaceekvationen (”två-dimensionella fall”).

Linjära PDE i två variabler av ordning ≤ 2.

ZC 12.1

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G.$$

I det allmänna fallet är $A, \ldots, G$ funktioner av x och y, i våra exempel oftast konstanter.

Då $G = 0$ är ekvationen *homogen*, annars är den *inhomogen.*

Superpositionsprinciper gäller också för denna typ av ekvationer:

- u_1 och u_2 lösningar till en *homogen* ekvation $u = c_1u_1 + c_2u_2$ är lösningar till denna för godtyckliga konstanter c_1 och c_2.

- u_1 och u_2 lösningar till ekvationen $u = u_1 - u_2$ är en lösning till motsvarande homogena ekvation.

Rätt ställt problem

Differentialekvation med bivillkor (randvillkor, begynnelsevillkor) sådant att:

- En och endast en lösning finns.
- Lösningen beror ”kontinuerligt” på bivillkoren.

Vilka rand och bivillkor som behövs för att ett problem skall vara rätt ställt beror väsentligen på koefficienterna A, B och C. Detta är orsaken till den klassificering som nämns i ZC Def 12.1:

- *parabolisk ekv.* om $B^2 - 4AC = 0$,
- *hyperbolisk ekv.* om $B^2 - 4AC < 0$,
- *elliptisk ekv.* om $B^2 - 4AC > 0$,

I den här kursen går man dock inte närmare in på detaljerna angående bivillkoren.

Lösningsmetoder som tas upp i kursen

- **Variabelseparation** ZC 12.1 – 6
  Tas upp nu.

- **Integraltransformering** ZC 14.2, 14.4
  Tas upp senare.

Definition:

Vi kallar ett *villkor* som ställs på funktioner för *homogent*, om

det faktum att f och g uppfyller villkoret medför att alla linjär kombinationer

$$af + bg,\ a \text{ och } b \text{ konstanter,}$$

också uppfyller villkoret.

Typiska exempel på homogena villkor:

- att satisfiera en homogen linjär diff.ekv,
- att vara = 0 i en viss punkt,
- att vara p-periodisk,
- att vara kontinuerlig (deriverbar, integrerbar, …)

Mall för separation-av-variabel-metoden för lösning av PDE

Fas I: Ta reda på vilka av problemets villkor som är homogena.

Ansätt i alla dessa en allmän funktion som är produkten av envariabelfunktioner – en för var och en av problemets variabler.

Fas II: Skriv om ekvationen i variabelseparerad form.

Ställ upp motsvarande ordinära differentialekvationer för envariabelfunktionerna tillsammans med de bivillkor som härrör från de givna homogena bivillkoren.

Bestäm de icke-triviala lösningarna till dessa ODE:n.

Fas III: Skriv upp den ”allmänna” lösningen till problemets homogena villkor genom att summera de lösningar man fått efter fas II. (Man får i den här kursen hoppas på att man får serier av fourier-typ.)

Fas IV: Anpassa koefficienterna i denna ”allmänna” lösning, så att problemets icke-homogena villkor också uppfylls.
(Integralformlerna för seriekoefficienterna kan behövas här.)