Modelltenta 1, 5B1207, Differentialekvationer II, för T2

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, kompletterande formelblad för 5B1207, räknedosa

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 14p, för betyget 4 minst 20p och för betyget 5 minst 26p

1. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 1, för övriga tillgodoräknas 3p*)
   Använd variation-av-parametermetodenför att bestämma den allmänna lösningen till
$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}, \; t > 0. \qquad (3p)$$

2. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 2, för övriga tillgodoräknas 3p*)
   Bestäm den generaliserade funktion $f(t)$ vars Laplacetransform är
$$\frac{s^2 + 3s - 9}{s^2 + s - 2}\, e^{-3s}. \qquad (3p)$$

3. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på bonusuppgiften, för övriga tillgodoräknas 3p*)
   Beräkna $e^{-|t|} * \cos 2t,$

   där $*$ betecknar faltningen $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t - \tau)\, d\tau.$ (3p)

4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
$$xy' + (1 + x)y = e^{-x} \sin 2x, \; x > 0. \qquad (3p)$$

5. I ett tabellverk hittar man att funktionen
$$|t|\, e^{-a|t|}, a > 0$$
   har fouriertransformen
$$\frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}.$$
   Beräkna med ledning härav
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a^2 - t^2)^2}{(a^2 + t^2)^4}\, dt. \qquad (3p)$$

6. Temperaturen $u(x,t)$ i punkten x vid tiden t ($t > 0$) hos en oisolerad homogen stav placerad längs en x-axel, $0 \le x \le \pi$, i ett rum med konstant temperatur u_o, satisfierar enligt termodynamikens lagar differentialekvationen
$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_o) = \frac{\partial u}{\partial t},$$
   där k är konduktiviteten längs stången och h värmeövergångstalet mot omgivningen.

   a. Formulera lämpliga randvillkor för det fall att stavens ändpunkter för $t > 0$ hålls på omgivningens temperatur. (1p)

   b. Bestäm alla lösningar på formen
$$u(x,t) = u_o + X(x) \cdot T(t)$$
   till problemet formulerat i a. (4p)

Var god vänd!

7. Betrakta ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}.$$

a. Har ekvationen några jämviktslösningar? Om ja, avgör stabiliteten hos dem. (1p)

b. Bestäm en lösning som är definierad i någon omgivning av $x = \pi/2$ och som uppfyller villkoret $y(\pi/2) = 0$. (3p)

c. Finns det någon lösning, definierad för *alla* reella x och för vilken $y(\pi/2) = 0$? (1p)

8. Signalen $x(t)$ har fouriertransformen

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{då } |\omega| > 4\pi, \\ 1, & \text{då } |\omega| < 2\pi \quad \text{och} \\ 2 - |\omega|/(2\pi), & \text{då } 2\pi \le |\omega| \le 4\pi. \end{cases}$$

Signalen samplas vid tidpunkterna $t = \frac{n}{3}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

a. Vilken är fouriertransformen för den samplade signalen? (3p)

b. Vilken är sampelvärdena $x(n/3)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$? (2p)

Anmärkning: Uppgiften kan lösas utan omfattande kalkyler.

Svar:

1. $y(t) = (t \ln t + At + B)\, e^{t}$.

2. $f(t) = \delta(t-3) + \left(\frac{11}{3} e^{-2(t-3)} - \frac{5}{3} e^{(t-3)}\right) u(t-3)$, där u är stegfunktionen.

3. $\frac{2}{5} \cos 2t$.

4. $y(x) = \frac{C - \cos 2x}{2x}\, e^{-x}$.

5. $\frac{\pi}{4a^3}$.

6a. $u(0, t) = u(\pi, t) = u_0$,

6b. $u(x, t) = u_0 + e^{-(kn^2+h)t} \sin nx$, n heltal ≥ 1.

7a. $y = -1$ (instabil) och $y = 1$ (stabil)

7b. $y = \sin(x - \pi/2) = -\cos x,\ 0 < x < \pi$.

7c. $y = \begin{cases} 1, & \text{om } x \geq \pi, \\ -\cos x, & \text{om } 0 \leq x \leq \pi, \\ -1, & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$

8a. $X_{\text{samplad}}(\omega) = 3 \times$ (6π-periodiska fortsättningen av $X(\omega)$) $= 3$ (rita figur!).

Detta medför att $x_{\text{samplad}}(t)$ ($= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n/3)\, \delta(t - n/3)$) $= 3\delta(t)$, vilket ger

8b. $x(0) = 3$, $x(n/3) = 0$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$