Modelltenta 2, 5B1207, Differentialekvationer II, för T2

Hjälpmedel: β Mathematics Handbook, kompletterande formelblad för 5B1207, räknedosa.

För betyget 3 krävs inklusive bonus minst 14p, för betyget 4 minst 20p och för betyget 5 minst 26p

1. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 1, för övriga tillgodoräknas 3p*)
Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + 3, \\ y'(t) = x(t) - 1/2\, y(t). \end{cases}$$ (3p)

2. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på kontrollskrivning nr 2, för övriga tillgodoräknas 3p*)
Bestäm en funktion $f(t)$ som satisfierar ekvationen

$$f(t) = e^{2t} + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)\, d\tau,\ t > 0.$$ (3p)

3. (*Räknas endast av dem som inte godkänts på bonusuppgiften, för övriga tillgodoräknas 3p*)
Funktionen x definieras av

$$x(t) = \begin{cases} 1/2, & \text{då } |t| \le 1/2, \\ 1 - |t|, & \text{då } 1/2 < |t| < 1, \\ 0, & \text{då } |t| > 1. \end{cases}$$

Beräkna de generaliserade 1:a- och 2:a-derivatorna till $x(t)$. Ange sedan fouriertransformen av $x(t)$. (3p)

4. Bestäm på explicit form alla lösningar till ekvationen

$$y'(x) = y^2 - 4y + 3,$$

Vilket är definitionsintervallet för den lösning som uppfyller $y(0) = 2$? (3p)

5. För vilka värden på den reella konstanten μ är (0, 0) en stabil spiralpunkt till systemet

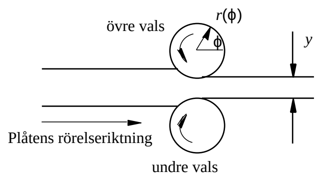
$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -x(t) + \mu\, y(t) \end{cases} \quad ?$$ (3p)

6. Ett stycke glasmassa som tas glasbrukets ugn håller en temperatur på 1000 °C. Glasmästaren vet, att massan är formbar så länge som temperaturen inte understiger 550 °C. Han observerar att glaset efter en minut har antagit en svagt rosa färg, vilket av erfarenhet betyder att temperaturen har sjunkit till 820 °C. Hur länge kan glasblåsaren fortsätta att bearbeta glasmassan om omgivningens temperatur är konstant 30°C?
Det kan förutsättas att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen mellan glas- och rumstemperatur ("Newtons avsvalningslag"). (5p)

7. Två likadana linjära tidsinvarianta system har pulssvarsfunktionen $\dfrac{1}{1+t^2}$. De sammansätts (seriekopplas) till ett nytt system. Vilken utsignal producerar detta om insignalen är en deltapuls tidsförskjuten 2 sek, dvs. $\delta(t-2)$? (5p)

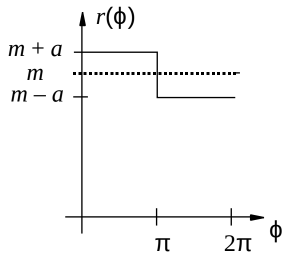
Var god vänd!

8. I figuren till höger visas ett tvärsnitt av ett valsverk. Valsarna roterar med jämn hastighet och trycker ihop plåten till önskad tjocklek.



Tvärsnitt av ett valsverk

I verkligheten så kommer plåttjockleken (y i figuren) att variera periodiskt på grund av asymmetri hos valsarna. Antag att den undre valsen är helt cylindrisk medan radien r hos den övre valsen varierar med vinkeln ϕ enligt figuren nedan. Här är m medeltjockleken hos valsen.



Radien hos valsen som funktion av ϕ.

Bestäm hur stor asymmetrin a får vara om storleken på tjockleksvariationerna ska begränsas så att

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} |Y_n|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} |Y_n|^2 < 0.01,$$

där Y_n är koefficienterna i den komplexa Fourierseriutvecklingen av $y(\phi)$. (5p)

Svar modelltenta 2:

1. $x(t) = -1 + A\,e^{-t} + 2B\,e^{3t/2}$, $y(t) = -$ß$2 - 2A\,e^{-t} + B\,e^{3t/2}$

2. $f(t) = \dfrac{3}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}$.

3. $x'(t) = \begin{cases} 1, \text{ då } -1 < t < -1/2, \\ 1 \text{ då } 1/2 < t < 1, \\ 0, \text{ då } |t| < 1/2 \text{ eller } |t| < 1. \end{cases}$ $\qquad x''(t) = \delta(t+1) - \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2) + \delta(t-1)$

   $X(\omega) = 2\,\dfrac{\cos(\omega/2) - \cos\omega}{\omega^2}$, $\left(X(0) = \dfrac{3}{4}\right)$

4. Jämviktslösningarna $y = 1$ och $y = 3$ samt $y = \dfrac{3C - e^{2x}}{C - e^{2x}}$. Lösningsintervallet $-\infty < x < \infty$.

   $\left(\text{Lösningen då } y(0) = 2 \text{ är } y = \dfrac{3 + e^{2x}}{1 + e^{2x}}.\right)$

5. $-2 < \mu < 0$.

6. $\dfrac{\ln[(1000-30)/(550-30)]}{\ln[(1000-30)/(820-30)]} \approx 3.0$ minuter.

7. $\dfrac{2\pi}{4 + (t-2)^2}$.

8. $a < \dfrac{0.1\,\pi}{\sqrt{\pi^2 - 8}} \approx 0.23$.

   (Några delresultat: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-2} |Y_n|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} |Y_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |y(\phi)|^2\, d\phi - (|Y_{-1}|^2 + |Y_0|^2 + |Y_1|^2)$,

   $Y_0 = m$, $Y_1 = -Y_{-1} = 2ai/\pi$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} |y(\phi)|^2\, d\phi = 2\pi(m^2 + a^2)$.)