Högre ordnings ekvationer och system av 1:a ordningen

Vi har hittills lärt oss lösa

- linjära ekvationer med konstanta koefficienter och *av vilken ordning som helst*

och

- linjära *system* av ekvationer med konstanta koefficienter *av ordning 1 enbart* .

Man efterlyser då förstås metoder för att lösa även system av godtycklig ordning, i synnerhet som många system som härrör från studiet av bl.a. sammansatta mekaniska system genererar sådana problem. I kurslitteraturen finns några exempel. I ZC, kap 7.6; flera massor sammankopplade med fjädrar (ex. 1) och dubbelpendeln (ex. 3).[1] Ett mera avancerat exempel finns i ”Projekt-modulen” sid. 406 – 409 om jordbävningars inverkan på flervåningshus. Ett liknande tillvägagångssätt som det som beskrivs där används också i kursboken i ljud- och vibrationslära i avsnitten om system med flera frihetsgrader (§3.3.2 och §3.3.3).

Anmärkningsvärt nog är det i princip ”enkelt” att lösa högre ordnings differentialekvationer och även system av sådana ekvationer, om man känner en motsvarande metod för att lösa *1:a ordningens* system av differentialekvationer. Man kan nämligen göra följande observation:

> Varje system av differentialekvation av högre ordning är ekvivalent med ett 1:a ordningens system.

Tankegången som leder till detta är rätt simpel[2]. Följande exempel får illustrera:

Låt oss betrakta ett system med två obekanta funktioner

$$\begin{cases} x_2''(t) - 9x_1''(t) + 5x_2(t) = t + 1, \\ x_1'''(t) + 2x_1'(t) + x_2'(t) - 7x_1(t) = e^{-t}. \end{cases} \tag{1}$$

Den högsta förekommande derivationsordningen för funktionerna är tydligen 3 respektive 2. Inför man nu tre nya obekanta funktioner $x_3(t)$, $x_4(t)$ och $x_5(t)$ genom att sätta

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_3(t), \\ x_2'(t) = x_4(t), \\ x_1''(t) = x_5(t), \end{cases} \tag{2}$$

$$\text{så är } \begin{cases} x_1'''(t) = x_5'(t), \\ x_1''(t) = x_3'(t) = x_5(t), \\ x_2''(t) = x_4'(t), \end{cases}$$

och systemet (1) kan då skrivas

[1] Den metod för att lösa problemen som den här skriften vill berätta om är dock en annan än den som beskrivs där. Den metoden, Laplacetransformering, tar vi upp senare i kursen.

[2] Se också anmärkningarna på sid 388 i ZC.

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_3(t), \\ x_2'(t) = x_4(t), \\ x_3'(t) = x_5(t), \\ x_4'(t) - 9x_5(t) + 5x_2(t) = t+1, \\ x_5'(t) + 2x_3(t) + x_4(t) - 7x_1(t) = e^{-t}, \end{cases} \tag{3}$$

vilket är ett system av ordning 1. Omvänt ser vi att systemet (1) kan härledas ur systemet (3) genom att man eliminerar $x_3(t)$, $x_4(t)$ och $x_5(t)$ ur de två sista ekvationerna med hjälp av de tre första. ■

Man kan tydligen ”köpa” sig till ett första ordningens system mot att man ”betalar” med ett större antal obekanta och ekvationer i systemet – för varje obekant funktion $x_i(t)$ som i det ursprungliga systemet förefinns med derivator upp till och med ordningen k, måste $k - 1$ st. nya obekanta och lika många nya ekvationer införas.

Man kan också notera konstgreppet inte förutsätter att ekvationerna nödvändigtvis är linjära – principen gäller alla slags differentialekvationer!

Exempelvis: Ett ”allmänt” andra ordnings system med två obekanta $x_1(t)$ och $x_2(t)$ och två ekvationer har formen

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2'', t) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2'', t) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

där F_1 och F_2 är två godtyckliga funktioner av 7 variabler. Sätter man

$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \end{cases} \tag{5}$$

så får man det ekvivalenta systemet

$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ F_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_3', x_4', t) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_3', x_4', t) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

som är av ordningen 1.

Övningar:

Skriv upp ett ekvivalent 1:a ordningens system till följande:

1. a. $\begin{cases} x_1'' = x_2, \\ x_2'' = x_1. \end{cases}$ b. $\begin{cases} x_1''' = x_2 + \sin t, \\ x_2'' = x_3 \\ x_3' = x_1. \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1'' = -2x_1 - 6x_2, \\ x_2' = x_1 + 3x_2. \end{cases}$ d. $\begin{cases} x_1'' = -4x_1 + x_2 - 2x_1', \\ x_2' = -8x_1 + 2x_2 + x_1'. \end{cases}$

e. $\begin{cases} x_1'' = \sin x_2', \\ x_2'' = x_1 x_2^2. \end{cases}$ f. $x_1'' - x_1 = f(t)$.

2. $\quad \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, där $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Om ursprungssystemet är linjärt, så kommer motsvarande 1:a ordnings system också att vara linjärt (eftersom de ekvationer man lägger till är linjära). Har systemet dessutom konstanta koefficienter så gäller samma sak för det ekvivalenta systemet.

Detta innebär att man i princip kan lösa linjära system med konstanta koefficienter av *godtycklig* ordning, eftersom man ju med egenvärdesmetoden kan lösa alla 1:a ordningens ekvationer av det slaget!

Exempel.

Ekvationen

$$x_1'' - x_1 = \frac{1}{t},\ t > 0, \tag{7}$$

är ekvivalent med 1:a ordningssystemet[3]

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/t \end{pmatrix},\ t > 0.$$

En lösning av detta system med egenvärdesmetoden avlöper på följande vis:

Egenvärden:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = \pm 1. \tag{8}$$

Egenvektorer:

$\lambda = 1.$ $\qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$\lambda = -1.$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Motsvarande homogena system har alltså som allmän lösning

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{h} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t} \tag{9}$$

och en *fundamentalmatris* till systemet är:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Ansatsen $\boldsymbol{x} = \Phi\,\boldsymbol{U}$ i den inhomogena ekvationen ger enligt variation-av-parameter-metoden villkor på vektorfunktionen $\boldsymbol{U}$:[4]

$$\boldsymbol{U}' = \Phi^{-1}\boldsymbol{f}(t),\ \text{där } \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/t \end{pmatrix},\ t > 0. \tag{11}$$

Alltså

$$\boldsymbol{U}' = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/t \end{pmatrix} = \frac{1}{2t}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}.$$

Detta ger att

3 Jämför övning 1d och exempel 3 i ZC §4.6..

4 Se ZC

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\tau}}{2\tau}\, d\tau \\ \displaystyle -\int_{t_0}^{t} \frac{e^{\tau}}{2\tau}\, d\tau \end{pmatrix}$$

där vi bara kan integrera över intervall som inte innehåller singulariteten $\tau = 0$.

Vi får den partikulära lösningen

$$\boldsymbol{x} = \Phi \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\tau}}{2\tau}\, d\tau \\ \displaystyle -\int_{t_0}^{t} \frac{e^{\tau}}{2\tau}\, d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{t-\tau} - e^{-(t-\tau)}}{2\tau}\, d\tau \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{t-\tau} + e^{-(t-\tau)}}{2\tau}\, d\tau \end{pmatrix} \tag{12}$$

Den första komponenten i denna vektor,

$$x_{1P} = \int_{t_0}^{t} \frac{e^{t-\tau} - e^{-(t-\tau)}}{2\tau}\, d\tau, \text{ där } t_0 \text{ något tal} > 0, \tag{13}$$

är därmed en partikulär lösning till den 2:a ordnings ekvation som vi utgick ifrån.

Den allmänna lösningen till den givna inhomogena ekvationen får man sedan genom att lägga till motsvarande homogena ekvations allmänna lösning:

$$x_1 = \int_{t_0}^{t} \frac{e^{t-\tau} - e^{-(t-\tau)}}{2\tau}\, d\tau + c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}.$$ ■

Anmärkning:

Den här metoden att förvandla högra ordnings system till (större) 1:a ordnings system är viktig eftersom den är så generell. Om man är på jakt efter lösningsmetoder för differentialekvationer så kan man i första hand begränsa sig till första ordnings system. Särskilt intressant är förfarandet om beräkningarna görs maskinellt. Det faktum, att de system av 1:a ordningen som man skapar tenderar att bli rätt mycket större än det system som man utgått ifrån, spelar då inte så stor roll.

När det gäller linjära ekvationer med konstanta koefficienter ger förfarandet dock inte något väsentligt “nytt”. Särskilt vid handräkning med ”små” problem är de mera elementära metoderna i ZC kap 4 oftast att föredra.

Notera att egenvärdesekvationen (8) är identisk med den karakteristiska ekvationen för differntialekvationen (7). Detta är ingen tillfällighet – så är det alltid om en linjär ekvation av högre ordning med konstanta koefficienter förvandlas till ett 1:a ordnings system. (Se övning 4 o. 5.) Man gör med egenvärdesmetoden väsentligen samma räkningar som man skulle gjort med den mera elementära metoden – motiveringen till vilka räkningar man gör är dock en annan.

Jämförs räkningarna som man gör för att bestämma den inhomogena ekvationens lösningar med variation-av-parameterförfarandet enligt ZC §4.6 med dem som vi gjorde i exemplet ovan, så ser man, att man också här i allt väsentligt gjort samma räkningar i de båda fallen.Villkoret (11) på funktionen $\boldsymbol{U}$ är (så när som på beteckningarna) identiskt med villkoret på motsvarande koefficienter i lösningsansatsen i §4,6 (se systemet på övre delen av sid 189 i ZC, 5:e upplagan). ■

Övningar:

3. Lös systemen i uppgifterna 1c, d och a.

4. a. Ange ett 1:a ordnings system som är ekvivalent med

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = 0,\ a_0 \text{ och } a_1 \text{ konstanter.}$$

b. Visa att egenvärdesekvationen till detta system är

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

och att den är identisk med den karakteristiska ekvationen till problemet i a.

5. a. Ange ett 1:a ordnings system som är ekvivalent med

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0,\ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \text{ konstanter.} \qquad (14)$$

b. Visa att egenvärdesekvationen till detta system är

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

c* Visa att determinantvillkoret i b.kan skrivas

$$(-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0,$$

dvs. att det är ekvivalent med den karakteristiska ekvationen till den linjära ekvationen (14).

Ledning: Använd vid determinantberäkningen att en determinants värde inte ändras om man ersätter en kolonn med kolonnen + en multipel av en annan kolonn: Addera $\lambda^{k-1} \times$ (kolonn nr k), $k = 2, 3, \dots, n$, till den första kolonnen. Den första kolonnen kommer då, så när som på dess sista element, bara bestå av 0:or. Utveckla sedan efter den första kolonnen.

Svar

1a. $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = x_2, \\ x_4' = x_1. \end{cases}$

1b. $\begin{cases} x_1' = x_4, \\ x_2' = x_5, \\ x_3' = x_1, \\ x_4' = x_6, \\ x_5' = x_3, \\ x_6' = x_2 + \sin t. \end{cases}$

1c. $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_1 + 3x_2, \\ x_3' = -2x_1 - 6x_2. \end{cases}$

1d. $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = -8x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_3' = -4x_1 + x_2 - 2x_3. \end{cases}$

1e. $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = \sin x_4, \\ x_4' = x_1 x_2^2. \end{cases}$

1f. $\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_1 + f(t). \end{cases}$

2. $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$, där $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. c. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$

(Motsvarande 1:a ordnings system har lösningen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.)$$

d. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$

(Motsvarande 1:a ordnings system har lösningen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.)$$

a. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t.$

(Motsvarande 1:a ordnings system har lösningen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} .)$$