

Fouriermetoder för T2

Syftet med det här kursavsnittet är att ge en orientering av en del i den matematiska analysen, de s.k. *fouriermetoderna*, som har visat sig vara mycket användbara och kraftfulla redskap för att modellera situationer inom signalbehandling, elektricitetslära, akustik m.m.

Fourieranalysen är i sig ganska komplex. Den har en egen begreppsapparat och i den finns många icke-triviala samband. Detta gör dels, att den matematisk/logiska delen av teorin inte är alldeles enkel om den bedrivs med vetenskaplig noggrannhet dels, att man kan närma sig ämnet på många olika sätt.

Här följer en informell framställning – syftet är att man i första hand skall kunna förstå att de resultat som ges är rimliga och kunna använda dem i naturvetenskapliga och tekniska sammanhang. Mera stringenta framställningar hittar man i speciallitteraturen.

1. Inledning

1.1 Fourierserier och -integraler inom signalteorin. Komplexa fourierserier.

Litet ytligt kan man säga att fourieranalysen i mycket handlar om konsten att uppfatta godtyckliga funktioner $x(t)$ som ”linjära kombinationer” av trigonometriska funktioner $\cos t$ och $\sin t$, där t oberoende av t . Eller, vilket går ut på samma sak: linjära kombinationer av de komplexa exponentialfunktionerna e^{it} , så kallade *harmoniska funktioner* (eller *harmoniska svängningar*).⁽¹⁾

Fourierserierna, som tagits upp tidigare i kursen, handlar ju just om detta:

En ”godtycklig” funktion $x(t)$ (näja, nästan godtycklig – kontinuerlig och med kontinuerlig derivata räcker) på intervallet $-\pi < t < \pi$ kan skrivas:

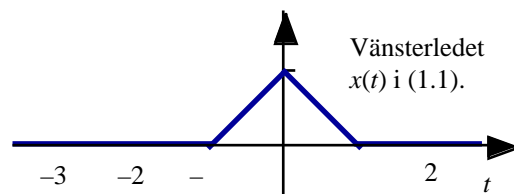
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (1.1)$$

där koefficienterna a_n och b_n erhålls ur

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt \, dt, \text{ då } n \geq 0 \text{ och } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt \, dt, \text{ då } n \geq 1. \quad (1.2)$$

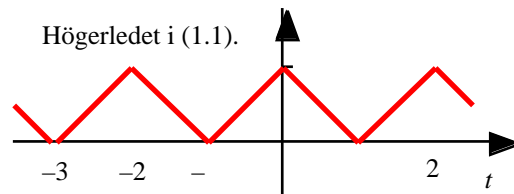
Anmärkning 1: En viktig sak att observera är att alla termerna i högerledet av (1.1) är 2π -periodiska funktioner definierade för *alla* reella t . Högerledet är alltså definierat och 2π -periodiskt för *alla* t . Detta innebär att om funktionen $x(t)$ som vi utgått ifrån till äventyrs skulle vara definierad även utanför intervallet $-\pi < t < \pi$ men inte 2π -periodisk, så gäller relationen (1.1) i allmänhet *inte* utanför intervallet ifråga! Tydligast syns kanske den distinktionen om man ser på graferna för funktionerna i vänster respektive höger led.

Om t.ex. $x(t)$ är definierad som $1 - |t|$, då $-\pi < t < \pi$, och, säg, $= 0$ för övriga t -värden. så är dess graf (alltså vänsterledets graf):



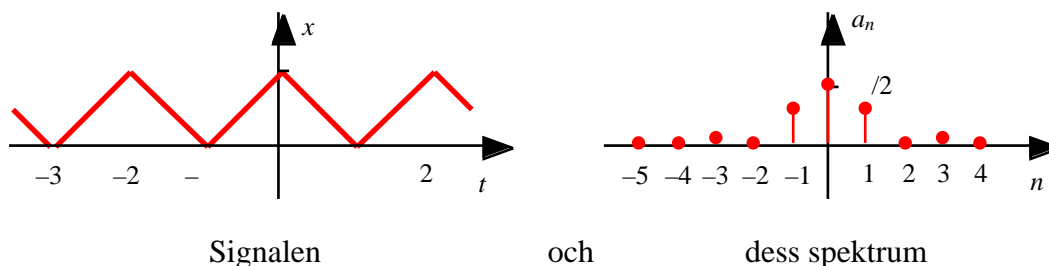
¹ Obs att $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$, $\sin t = (e^{it} - e^{-it})/(2i)$ och $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Linjära kombinationer av $\cos t$ och $\sin t$ är därför alltid linjära kombinationer av funktioner av typ e^{it} och vice versa.

Summan i högra ledet kommer däremot att ha grafen:



Likhet för alla t i (1.1) gäller tydligen om och bara om $x(t)$ är definierad för alla t och dessutom 2-periodisk. ■

För en signalteoretiker eller akustiker skulle funktionen $x(t)$ vara en beskrivning av "signalen"; t är då en tidsvariabel (vanligen mätt i sekunder) och x anger, t.ex. om det gäller ljud, tryckavvikelsen från normaltrycket (ljudtrycket). Relationen (1.1) uttrycker att signalen är sammansatt av "harmoniska svängningar" med "frekvenser" som är heltalsmultipler av $\frac{1}{2}$ [Hz].² Koefficienterna a_n och b_n relaterar man då till respektive svängnings amplitud – de utgör signalens *spektrum*.



Övningar

1.1 Figuren ovan ger (en bit av) grafen för den 2-periodiska signal $x(t)$ som i intervallet $-3 < t < 1$ antar värdena $x(t) = -|t|$. Verifiera att amplituderna för sinussvängningarna, b_n , alla är = 0 och de för cosinussvängningarna,

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{då } n \text{ jämnt och } 0, \\ \frac{4}{n^2}, & \text{om } n \text{ udda,} \\ 2, & \text{då } n = 0. \end{cases}$$

Med tanke på att räknelagarna för exponentialfunktionerna är enklare än de för de trigonometriska och med tanke på Eulers formler, är det naturligt att uttrycka fourierserietermerna

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

i linjära kombinationer av e^{int} och e^{-int} . Man får

$$\begin{aligned} a_n \cos nt + b_n \sin nt &= \frac{1}{2} [a_n(e^{int} + e^{-int}) - ib_n(e^{int} - e^{-int})] = \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-int} = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}, \end{aligned}$$

där vi satt $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, om $n > 0$ och $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, om $n < 0$.

Sätter man sedan $c_0 = \frac{a_0}{2}$, så kommer hela fourierserien att skrivas om till en mera lätthanterlig komplex oändlig serie:

² 1 Hz = en svängning (eller ett varv)/sek.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

De komplexa c:koefficienterna kan beräknas direkt ur seriesumman $x(t)$:

För $n > 0$:
$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) (\cos nt - i \sin nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-int} dt,$$

för $n < 0$:
$$c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) (\cos(-nt) + i \sin(-nt)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-int} dt,$$

och för $n = 0$:
$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt,$$

dvs. sambandet
$$c_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-int} dt$$

gäller för *alla* heltal $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Sammanfattningsvis:

Komplex fourierserieutveckling:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \tag{1.3}$$

$$c_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-int} dt \tag{1.4}$$

Om $x(t)$ reell och

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

så gäller $a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, b_n = -2 \operatorname{Im} c_n, n \neq 0$ (1.5)

och $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, n > 0, c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, n < 0, c_0 = \frac{a_0}{2}.$ (1.6)

Övningar:

1.2 a. Verifiera att om $x(t)$ är en reellvärd funktion så är $c_{-n} = \overline{c_n}$ och omvänt: Om $c_{-n} = \overline{c_n}$ i serien (1.3) så är $x(t)$ en reellvärd funktion.

(Ledning: Utnyttja att $\overline{c_n} e^{-int} + c_n e^{int} = 2 \operatorname{Re}(c_n e^{int})$.)

b. Bestäm den komplexa fourierserien (1.3) till funktionen i uppgift 1.1.

1.3 a. Verifiera att för reella a och b , $a \cos t + b \sin t = A \cos(t + \phi)$, där

$$A = (a^2 + b^2)^{1/2} \text{ och } \tan \phi = -b/a, (\phi = -\pi/2 \text{ om } a = 0).$$

Funktionens maximalvärde, A , är svängningens *amplitud*, ϕ är *fasvinkeln* eller *fasläget* och $1/(2\pi)$, är svängningens *frekvens*.

I ord kan relationen i 1.3a uttryckas: Varje linjärkombination av sinus- och cosinussvängningar med samma frekvens kan uppfattas som *en* fasförskjutet cosinussvängning med den frekvensen.

b. Vilka är amplituderna A_n och fasvinklarna ϕ_n för de olika frekvenserna hos funktionen i uppgift 1.1?

c. Verifiera att koefficienterna c_n av serien (1.3) då $x(t)$ reell också ges av

$$\frac{1}{2} A_n e^{i\phi_n} \text{ då } n \geq 1, \frac{1}{2} A_{-n} e^{-i\phi_n} \text{ då } n \leq -1 \text{ och } c_0 = A_0. \quad \blacksquare$$

1.4 Funktionen $x(t)$ är 2π -periodisk och

$$x(t) = \frac{t}{2}, \text{ då } -\pi < t < \pi.$$

a Beräkna dess komplexa fourierseriekoefficienter med hjälp av (1.4).

b Bestäm sedan t ex med hjälp av sambanden (1.5) dess reella fourierseriekoefficienter.

Anmärkning 2: Valet av intervall $-\pi < t < \pi$ och periodlängd 2π ovan känns kanske litet konstlat. Det är dock mera en formelteknikalitet. Om periodlängden istället är L ($L > 0$) så kan man med skalning av t -axeln överföra det fallet till 2π -fallet – man substituerar $t = 2\pi/L \cdot \tau$ och får de mera generella sambanden:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n t/L + b_n \sin 2\pi n t/L), \quad (1.1')$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(\tau) \cos 2\pi n \tau/L d\tau, \text{ då } n \geq 0 \text{ och } b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(\tau) \sin 2\pi n \tau/L d\tau, \text{ då } n \geq 1, \quad (1.2')$$

med de komplexa varianterna:³

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/L}, \quad (1.3')$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(\tau) e^{-2\pi i n \tau/L} d\tau. \quad (1.4')$$

För L -periodiska $x(t)$ kan integrationsintervallen ovan ersättas med vilket som helst intervall som har längden L . ■

³ Se också ZC 11.2, exercise 21, sid 495.

Övningar:

1.5 Utför substitutionen $t = 2\pi/L \cdot \tau$ i (1.1) – (1.4) och verifiera därigenom relationerna (1.1') – (1.4'). Verifiera också att relationerna (1.5) och (1.6) mellan a -, b - och c -koefficienterna gäller oförändrade. Vilket utseende får de komplexa formlerna om periodlängden = 1?

1.6 Funktionen $x(t)$ är 2-periodisk och $x(t) = \frac{2}{4} t^2 - \frac{1}{3}$, då $-1 < t < 1$.

- a** Bestäm dess komplexa fourierseriekoefficienter.
- b** Bestäm sedan t ex med hjälp av sambanden (1.5) dess reella fourierseriekoefficienter.

Fourierserierna handlar alltså om konsten att skriva *periodiska* funktioner som ”linjära kombinationer” av komplexa exponentialfunktioner $e^{i \cdot t}$. De så kallade *Fourierintegralerna* befattar sig med samma problem, fast för funktioner $x(t)$ som är definierade för alla reella t och inte nödvändigtvis är periodiska. Man kan nämligen visa att för en stor klass av sådana funktioner gäller

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i \omega t} d\omega, \tag{1.7}$$

där

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i \omega t} dt. \tag{1.8}$$

Den första av dessa relationer kan uppfattas som att $x(t)$ är en linjär kombination av (de oändligt många) funktionerna $e^{i \omega t}$. Så när som på den konstanta faktorn $\frac{1}{2\pi}$ svarar faktorn $X(\omega)$ mot den linjärekombinationens koefficienter (funktionens *spektrum*), den benämns *fouriertransformen* av $x(t)$. Sambandet (1.7) kallas ibland *syntesekvationen* (för fouriertransformer) – den anger hur funktionen $x(t)$ ”byggs upp” av sina ”beståndsdelar” $\frac{1}{2\pi} X(\omega) e^{i \omega t}$. Analogt sägs (1.8) vara *analysekvation* – den talar om vilka ”beståndsdelar” funktionen $x(t)$ har.

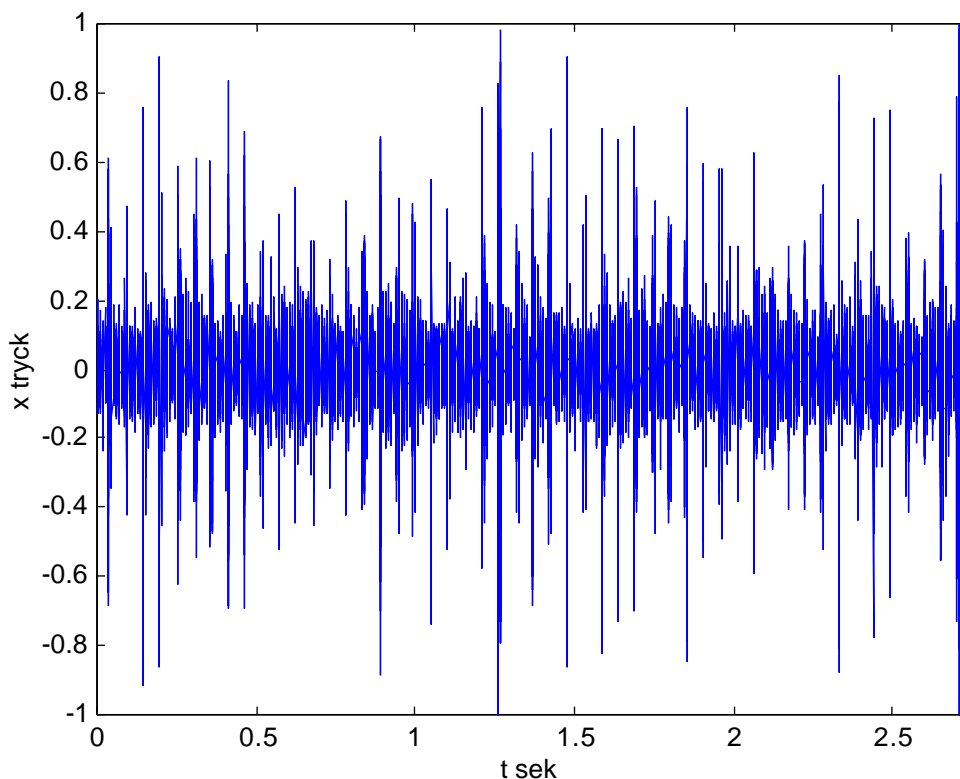
Anmärkning 3: Observera de formella likheterna mellan formelparen (1.3) resp. (1.4) å ena sidan och (1.7) resp. (1.8) å den andra. Skillnaden mellan (1.4) och (1.8) är förutom skalfaktorn $\frac{1}{2\pi}$ att integrationsgränserna är olika. Samma gäller för (1.3) och (1.7) om man uppfattar serien i (1.3) som en ”integral” där ”integrationsvariabeln” n bara antar de diskreta värdena $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Detta är ingen tillfällighet. I viss mening kan man nämligen se fourierserietransformen som ett specialfall av fouriertransformen. ■

En intressant sak är att vi här har två helt olika sätt beskriva funktionen $x(t)$ på: Den ena anger funktionens värden för godtyckliga t (vänster led i (1.3) resp. (1.7)), den andra i stället spektret c_n resp. $X(\omega)$ (höger led). Det som gör detta faktum så användbart är att vissa egenskaper (som t.ex. $x(t)$:s maximum eller minimum) avläses lättast på funktionen i vänster led medan andra ses lättast på dess amplitudspektrum.

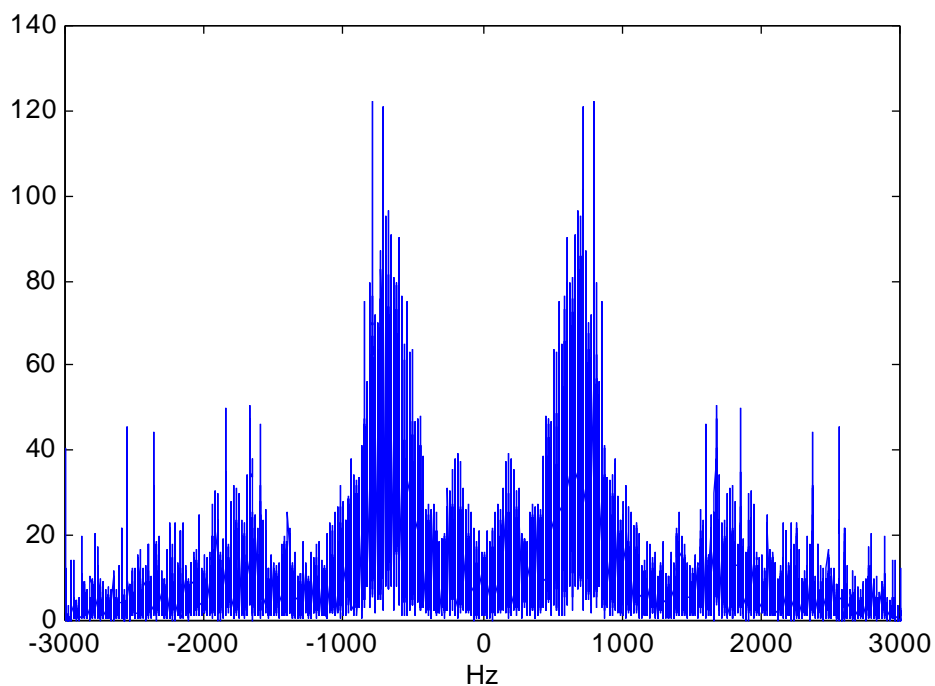
Som ett exempel⁴: Figuren nedan visar vibrationerna från en maskin som används vid massatillverkning – en så kallad raffinör. Den är i princip en stor kvarn. I det första steget huggs träråvaran upp till flis som sedan bearbetas mekaniskt (mals) i raffinören. De kemikalier som sedan tillsätts träfibrerna kan efter malningen lättare lösa ut de massafibrer som används vid papperstillverkningen. Raffinören består i princip av en fast kvarnskiva och en roterande fastsatt på en axel vilken bärs upp av tre rullningslager.

⁴ Källa MWL (Marcus Wallenberglaboratoriet, KTH).

Mätinstrumentet, en accelerometer, sitter nära ett av rullningslagren som i detta speciella fall har en skada på en av de 16 rullarna. Skadan är en tvärgående spricka som varje gång den passerar kontaktzonen mellan rullen och lagrets inner- eller yttering orsakar ett slag. Diagrammet är grafen för den funktion $x(t)$ som anger ljudtrycket x , med tidsvariabeln t .



Grafen själv är svårtolkad – det är svårt att urskilja vad som härrör från det brusartade ljud som maskinen alltid alstrar och det extraljud som härrör från skadan. Om man däremot bestämmer spektret för signalen $x(t)$, vilket kan göras med en numerisk variant av analyskvationen (1.8), så får man diagrammet



där man ser tydliga stora ”tontoppar” vid c:a 800 Hz vid sidan av en del mindre. Tontopparnas frekvenslägen bestäms av skadans periodicitet och kallas skadans signatur. Signaturen används vid maskinell övervakning för att upptäcka eventuella skador i ett tidigt skede. Tidig upptäckt gör det möjligt att planera in underhållsstopp och undvika de ofta mycket höga kostnader som ett oplanerat driftstopp eller ett haveri skulle innebära.

Övningar:

1.7 Beräkna fouriertransformerna till

$$\begin{aligned} \text{a. } x(t) &= \begin{cases} 1, & \text{om } |t| \leq 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases} & \text{b. } x(t) &= \begin{cases} e^{-t}, & \text{om } 0 \leq t, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases} & \text{c. } x(t) &= \begin{cases} 0, & \text{om } 0 \leq t, \\ e^t, & \text{om } t < 0. \end{cases} \\ \text{d. } x(t) &= e^{-|t|}. \end{aligned}$$

Fouriertransformen för en signal kan alltså ge viktig information om signalen, information som kan vara svår att få fram på annat sätt. Intressant är ofta att veta hur förändringar i signalen påverkar fouriertransformen och vice versa.

Om t.ex. en signal klipps av (man kanske inte har tid att lyssna på hela signalen), på vilket sätt ändras då fouriertransformen? Om en signal samplas (dvs. den avläses bara vid vissa diskreta tidpunkter), vad händer då med fouriertransformen? Och omvänt, om fouriertransformen (spektret) ändras genom att man klipper bort vissa frekvenser (s.k. filtrering), på vilket sätt påverkas då signalen?

Problemställningar av det slaget diskuteras närmare längre fram (arbetsmaterial nr 5).

I de två följande avsnitten skall vi titta litet på hur man mäter avvikelser mellan signaler; vad skall man t.ex. mena med att två signaler är nästan lika?

1.2 Litet om fel

Alla uppmätta storheter avviker naturligtvis mer eller mindre från den (tänkta) ideala storheten som man egentligen är ute efter – i stället för den exakta signalen $x(t)$, $a < t < b$ uppmäter man en annan, $\hat{x}(t)$. För att kunna göra en felanalys behöver man komma överens om ett avståndsmått som anger hur mycket funktionen $\hat{x}(t)$ avviker från $x(t)$. Det som man kanske först kommer att tänka på är att man tar den *maximala* avvikel- sen, dvs.

$$d_m = \max_{a < t < b} |\hat{x}(t) - x(t)| \quad (1.9)$$

som ett sådant mått. Vid närmare eftertanke förstår man dock att detta inte är särskilt lyckat ur signalteorins synpunkt: Om $\hat{x}(t)$ och $x(t)$ skulle vara två ljudupptagningar av en konsert, identiska så när som på att någon under ett kort tidsintervall hostar i den ena av upptagningsmikrofonerna. Storheten d_m skulle då väsentligen bestämmas av hostningens intensitet, som ju kan vara rätt stor. Trots detta skulle man nog inte vilja uppfatta de båda upptagningarna som så värst olika.

Ett bättre mått, som inte lägger så stor vikt vid kortvariga avvikelser får man i stället ur det s.k. *effektivvärdet* av avvikel- sen.⁵:

$$d_2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b |\hat{x}(t) - x(t)|^2 dt \quad , \quad (1.10)$$

där $a < t < b$ är tidsintervallet under vilken upptagningen görs.⁶

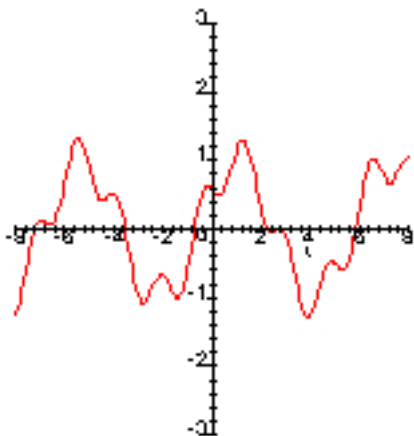
⁵ Se kursboken i ljud- och vibrationslära (Bodén, Carllson, Glav, Wallin och Åbom), kap 1.3.

⁶ Observera att d_m och d_2 och x har samma fysikaliska dimension – tryckdimension (Pascal) i fallet med ljudupptagningen.

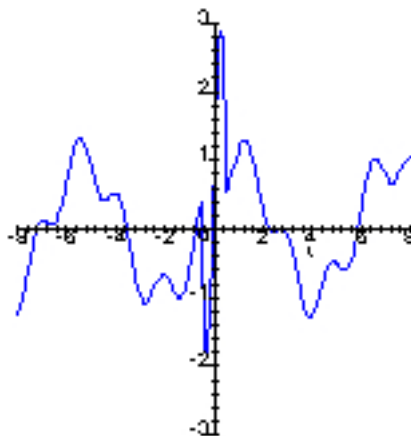
I teoretiska sammanhang har man också signaler som är definierade på hela reella talaxeln, man väljer då istället den s.k. funktionsnormen:

$$\|x - x'\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x'(t)|^2 dt} \quad (1.10')$$

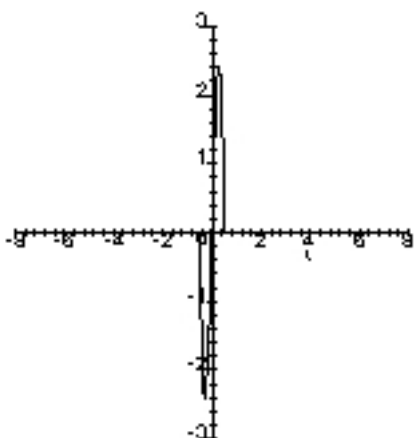
som felmått (förutsatt förstås att den generaliserade integralen är konvergent).



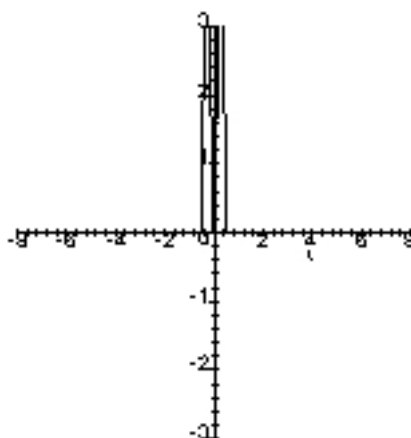
Ostörd signal $x(t)$



Störd signal $x'(t)$



Differenssignal $x(t) - x'(t)$,
maxavvikelse $d_m = 2,4$.



Kvadrerad avvikelse $|x(t) - x'(t)|^2$, $d_2 = 0,4$.
(1.10)-integralens värde = arean under grafen.

Övningar:

1.8 Graferna ovan hör till signalerna

$$x(t) = \cos(t - 1) - \frac{1}{3} \cos(3,7t - 1,7) \quad \text{och} \quad x'(t) = \begin{cases} x(t) + 50t \left(\frac{1}{4} - t^2 \right), & \text{då } |t| < \frac{1}{2}, \\ x(t), & \text{då } \frac{1}{2} < |t| < 8. \end{cases}$$

Beräkna d_m och d_2 definierade som i (1.9) och (1.10).

- 1.9** Låt $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2 - 1/3$, då $-1 < t < 1$, medan funktionerna = 0 för övriga t -värden. Bestäm funktionernas effektivvärden i intervallet $-1 < t < 1$ och även funktionsnormerna i $-1 < t < 1$.

Integralen $\int_a^b |x(t)|^2 dt$, (1.11)
 kan ses som ett mått på signalens totala energi:

T.ex. för det fall att $x(t)$ anger strömstyrkan i ampere genom ett motstånd R [Ω], så ges den spänningen av $y(t) = R \cdot x(t)$ [V] och den momentana effekten W [W] av

$$W(t) = x(t) \cdot y(t) = R \cdot |x(t)|^2.$$

Integralen (1.11) ger alltså den totala energin under tidsintervallet $a \leq t \leq b$, så när som på proportionalitetsfaktorn R . Medelvärde

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |x(t)|^2 dt, \quad (1.12)$$

blir då på samma sätt proportionellt mot signalens medeleffekt.

En motsvarande tolkning kan göras också för det akustiska fallet då $x(t)$ ($= p(t)$) ljudtrycket. Generellt ges nämligen den momentana effekten W hos ett mekaniskt system produkten [kraft] \times [hastighet] = [tryck] \times [area] \times [hastighet]. I akustiska sammanhang kan man visa att ljudtrycket p under allmänna omständigheter är proportionellt mot partikelhastigheten u i mediet,

$$p = \rho_0 c u,$$

där konstanterna ρ_0 [kg/m³] och c [m/s] är det ostörda mediets densitet respektive ljudhastigheten i mediet.⁷

Då är alltså den momentana effekten per m², $W/A = p \cdot u = (1/\rho_0 c) p^2 = |p(t)|^2$.

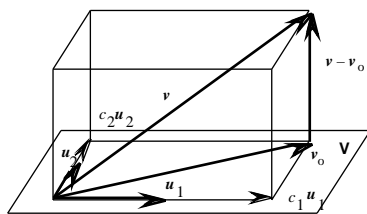
Storheterna och $\int_a^b |p(t)|^2 dt$, respektive $\frac{1}{b-a} \int_a^b |p(t)|^2 dt$, representerar, så när som på en proportionalitets-

konstant, ljudsignalens totala energi respektive medeleffekt. Om avståndsmåttet d_2 mellan två signaler är litet, så innebär detta alltså att de *energimässigt* ligger nära varandra.

Men det finns flera anledningar till det speciella valet av felmått. En har att göra med ett nära släktskap med minstakvadratmetoden. Om detta handlar nästa avsnitt.

1.3 Om ortogonalitet. Parsevals relation.

Partiellsummor till en funktions fourierserie ger ofta kusligt bra approximationer till funktionen. Detta kan i på sätt och vis förklaras av att fourierutvecklingen i viss mening är optimal. Informellt kan man förstå hur detta hänger ihop via den geometriska analogi som ligger till grund för det generella approximationsförfarande som går under namnet "minstakvadratmetoden".



Anta att u_1 , u_2 och v är tre vektorer i rummet sådana att u_1 och u_2 spänner upp ett plan V . Om v ligger i detta plan, så kan v skrivas som en linjär kombination av u_1 och u_2

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

Vektorerna u_1 och u_2 kan ses som en bas för ett koordinatsystem i planet V och koefficienterna c_1 och c_2 som koordinaterna för vektorn v i den basen. Dessa är särskilt lätta att beräkna om vektorerna u_1 och u_2 är vinkelräta mot varandra, dvs då den skalära produkten $u_1 \cdot u_2 = 0$. Man har nämligen då att

$$u_1 \cdot v = c_1 u_1 \cdot u_1 + c_2 u_1 \cdot u_2 = c_1 |u_1|^2,$$

varav $c_1 = (u_1 \cdot v) / |u_1|^2$ och på samma sätt $c_2 = (u_2 \cdot v) / |u_2|^2$ (1.13)

⁷ Se kursboken i ljud- och vibrationslära (Bodén, Carllson, Glav, Wallin och Åbom), kap 1.3 - 4, 4.2.2 och 4.2.6.

Om \mathbf{v} inte ligger i planet \mathbf{V} så finns ingen möjlighet att uttrycka \mathbf{v} med hjälp av \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2 som i (1.12). Däremot finns det i planet \mathbf{V} en vektor \mathbf{v}_0 som ligger närmast \mathbf{v} , nämligen den för vilken $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ är vinkelrät mot planet, och alltså också mot \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2 . Detta innebär att om $\mathbf{v}_0 = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$, så måste

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{u}_k = (\mathbf{v} - c_1\mathbf{u}_1 - c_2\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_k = 0, k = 1, 2.$$

Detta ger igen sambanden (1.13) och man kan sammanfatta:

Den vektor i planet som ligger närmast \mathbf{v} ges av $\mathbf{v}_0 = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2, \text{ där } c_i = \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}}{ \mathbf{u}_i ^2}, i = 1, 2$	(1.14)
---	--------

och "felet" man gör då man approximerar $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ ges av $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|$. Enligt Pythagoras' sats (se fig) blir detta:

$$|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2 = |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{v}_0|^2 = |\mathbf{v}|^2 - |c_1|^2|\mathbf{u}_1|^2 - |c_2|^2|\mathbf{u}_2|^2.$$

Man ser också att

$$|\mathbf{v}|^2 = |c_1|^2|\mathbf{u}_1|^2 + |c_2|^2|\mathbf{u}_2|^2. \quad (1.15)$$

Om speciellt \mathbf{v} ligger i planet \mathbf{V} , så kommer $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ och felet vara = 0, d.v.s likhet gäller

$$|\mathbf{v}|^2 = |c_1|^2|\mathbf{u}_1|^2 + |c_2|^2|\mathbf{u}_2|^2 \quad (1.16)$$

Förfarandet kan utan vidare generaliseras till vektorer i \mathbf{R}^n och till flera "basvektorer" \mathbf{u}_k än två och även till vektorer i \mathbf{C}^n med komplexa koordinater, detta om man definierar skalärprodukt av två sådana vektorer med koordinater

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ och } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

enligt
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}. \quad (\text{Obs konjugeringen!})$$

Normen (längden), $|\mathbf{x}|$, av en vektor definieras då av

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^n |x_k|^2.$$

Anmärkningsvärt nog kan allt detta generaliseras ytterligare till att handla om funktioner i stället för vektorer! Detta om man definierar "skalärprodukt mellan två funktioner" $x(t)$ och $y(t)$ som

$$(x(t), y(t)) = \int_b^c x(t) \overline{y(t)} dt, \text{ där } b < t < c \text{ är ett passande intervall}^8 \quad (1.17)$$

och i analogi därmed "normen av $x(t)$ ", $\|x(t)\|$, enligt

$$\|x(t)\|^2 = (x(t), x(t)) = \int_b^c |x(t)|^2 dt. \quad (1.18)$$

som då alltså motsvarar det geometriska längdbegreppet och som vi ser är detta just energiintegralen i (1.11).

Man får en koppling mellan detta och fourierserietveckling av L -periodiska funktioner om man definierar skalärprodukten och norm som i (1.17) och (1.18) med ett integrationsintervall av längd L :

$$(x(t), y(t)) = \int_L x(t) \overline{y(t)} dt \text{ och } \|x(t)\|^2 = \int_L |x(t)|^2 dt. \quad (1.19)$$

⁸ Beteckningen $(x(t), y(t))$ för skalärprodukten av två funktioner är rätt vedertagen. Observera att beteckningen $x(t) \cdot y(t)$ inte är lämplig eftersom den ju allmänt används när man multiplicerar två funktioner "som vanligt".

Syntesekvationen
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n t}, \quad t = 2\pi/L$$

uttrycker att "alla" L -periodiska funktioner exakt kan skrivas som en linjär kombination av "basfunktionerna"

$$u_n(t) = e^{i n t}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

med $c_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, som motsvarande koordinater.

Eller annorlunda uttryckt: "Vektorn" $x(t)$ ligger i det "rum" som "vektorerna" $e^{i n t}, n = 0, \pm 1, \dots$, spänner upp.

För dessa basfunktioner gäller nu att deras parvisa skalära produkter är = 0:

$$\begin{aligned} (u_m(t), u_n(t)) &= \int_{-L/2}^{L/2} e^{i n t} \cdot e^{-i m t} dt = \int_{-L/2}^{L/2} e^{i (m-n)t} dt = 0 \quad \text{om } m \neq n \\ &= \frac{e^{i (m-n) L/2} - e^{-i (m-n) L/2}}{i (m-n)} = \frac{e^{i L (m-n)/2} - e^{-i L (m-n)/2}}{i (m-n)} = L \sin \frac{(m-n)\pi}{2} = 0, \end{aligned}$$

eftersom $\sin k = 0$ för varje heltal k . *Basfunktionerna är alltså parvis vinkelräta.*

För normerna gäller

$$\|u_n(t)\|^2 = \int_{-L/2}^{L/2} e^{i n t} \cdot e^{-i n t} dt = \int_{-L/2}^{L/2} dt = L,$$

d.v.s. *basfunktionernas normer (basvektorernas längder) är alla $= \sqrt{L}$.*

Detta betyder att koefficienterna c_n i syntesekvationen bör kunna beräknas enligt principen (1.13) ovan

$$c_n = \frac{(x(t), u_n(t))}{\|u_n(t)\|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t) \cdot e^{-i n t} dt$$

vilket inte är något annat än just analysekvationen.

Vidare: Partialsummorna till fourierserien,

dvs.
$$x_M(t) = \sum_{n=-M}^M c_n e^{i n t},$$

kan uppfattas som den bästa approximation till $x(t)$ som man kan få genom att linjärkombinera de $2M + 1$ funktionerna $e^{i n t}, n = 0, \pm 1, \dots, \pm M$, på samma sätt som v_0 approximerar v ovan. Felet vid approximationen mäts då med normen

$$\|x(t) - x_M(t)\|^2.$$

Tänker man på $x(t)$ som en signal, så är normkvadraten som vi sett ovan ett mått på energin/period i signalen. För signalen x_M kommer alltså bortfallet, i förhållande till signalen $x(t)$, energimässigt att vara så litet som möjligt jämfört med andra approximationer som är linjära kombinationer av de $2M + 1$ funktionerna $e^{i n t/L}, n = 0, \pm 1, \dots, \pm M$.

Sambandet (1.14) ovan ("Pythagoras' sats") kommer i fourierseriesammanhang att få utseendet

$$\int_{-L/2}^{L/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-L/2}^{L/2} |x(t) - x_M(t)|^2 dt + \int_{-L/2}^{L/2} |x_M(t)|^2 dt = \int_{-L/2}^{L/2} |x(t) - x_M(t)|^2 dt + \sum_{n=-M}^M |c_n|^2 \int_{-L/2}^{L/2} |u_n(t)|^2 dt = \int_{-L/2}^{L/2} |x(t) - x_M(t)|^2 dt + L \sum_{n=-M}^M |c_n|^2. \quad (1.20)$$

Likheten kallas *Parsevals relation*. En energimässig tolkning av den är att:

Totala energin/period hos en signal = summan av delsvängningarnas totala energi/period.

För fouriertransformen och mera godtyckliga komplexvärda funktioner $x(t)$, definierade på hela reella axeln, kan man visa att motsvarande sakförhållanden gäller. Om den skalärprodukt och norm definieras av

$$(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt \quad \text{och} \quad \|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (\text{konvergens förutsatt}),$$

så kommer

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (1.21)$$

Vänstra ledet är då signalens totala energi medan högra ledet är "summan" av energierna hos delsvängningarna. Man tolkar då $\frac{1}{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$ som energin hos svängningarna med vinkelfrekvenser i det "infinitesimala" intervallet mellan ω och $\omega + d\omega$. Motiveringen till faktorn $\frac{1}{2\pi}$ är mera djupsinnig, så den väntar vi med.

Den matematiska substansen i Parsevals relation är betydande, vilket något litet framgår av nästa exempel.

Exempel 1.1

Enligt övning 1.2b har vi för den 2π -periodiska funktionen $x(t)$ som i intervallet $-\pi < t < \pi$ är $x(t) = 1 - |t|$:

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{72} \cos 3t - \frac{1}{52} \cos 5t + \frac{1}{32} \cos 7t - \dots \right)$$

Parsevals relation (1.20) ger då att

$$\|x(t)\|^2 = 2 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - |t|)^2 dt = 2 \left(\frac{3}{2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \right)$$

där $\int_{-\pi}^{\pi} (1 - |t|)^2 dt = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} (1 - t)^2 dt = \frac{2}{3} \left[t - \frac{2}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \left(\pi - \pi^2 + \frac{1}{3} \pi^3 \right)$

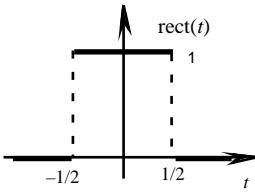
varav $\frac{2}{3} \left(\pi - \pi^2 + \frac{1}{3} \pi^3 \right) = 2 \left(\frac{3}{2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \right)$, d.v.s. $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{4}{96}$.

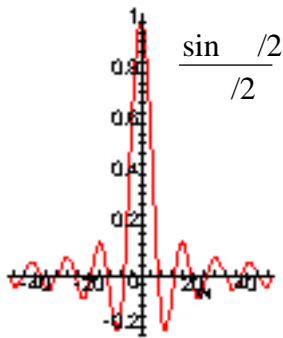
Ett resultat som knappast framstår som självklart! ■

Exempel 1.2:

Fouriertransformen för den så kallade *rektangelfunktionen*

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } -1/2 < t < 1/2, \\ 0, & \text{för övriga } t, \end{cases}$$





är

$$X(\omega) = \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{i} = \frac{\sin \omega/2}{\omega/2},$$

detta då $\omega \neq 0$. Och för $\omega = 0$ får man direkt att $X(0) = 1$.

Parsevals relation (1.21) utsäger då att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega/2}{\omega^2/4} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_{-1/2}^{1/2} |\text{rect}(t)|^2 dt = 2 \int_{-1/2}^{1/2} 1^2 dt = 2,$$

vilket inte heller är något på annat sätt lättfunnet resultat. (Integranden i den vänstra integralen saknar nämligen elementär primitiv funktion, så dess värde kan inte bestämmas med den vanliga rutinmetoden.) ■

Övningar:

1.10 a. Bestäm med hjälp av Parsevals relation och resultatet av uppgift 1.4a värdet av summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

b. Använd på samma sätt resultatet från uppgift 1.6.a för att summera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

1.11 a. Använd syntesekvationen för fourierintegralerna och det faktum att $\frac{\sin \omega/2}{\omega/2}$ är fouriertransformen

av $\text{rect}(t)$ för att beräkna värdet av $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega/2}{\omega^2/4} d\omega$.

b. Funktionen som är $\frac{\sin x}{x}$, för $x \neq 0$ och $= 1$ då $x = 0$, brukar kallas "sinus cardinalis" eller

kortare sinc. Vilket värde har $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(x) dx$? Vilka är nollställena till sinc? Skissera kurvan.

1.12 Låt $a > 0$ och $x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{då } t \geq 0, \\ 0, & \text{då } t < 0, \end{cases}$ $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{då } t > 0, \\ e^{at}, & \text{då } t \leq 0 \end{cases}$ samt $z(t) = e^{-a|t|}$.

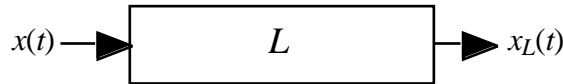
Bestäm funktionernas fouriertransformer. Använd sedan Parsevals relation för att bestämma värdet av

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega.$$

1.4 Orientering om linjära tidsinvarianta system och fouriertransformer

Det man vill studera i tekniska och fysikaliska sammanhang är ofta ett slags "processer" som förvandlar tidsberoende fysikaliska storheter, "insignalerna", till andra tidsberoende fysikaliska storheter, "utsignalerna". En radioapparat tar in elektromagnetiska vågor och skickar ut ljudvågor, en pendel påverkas av en kanske tidsberoende kraft (insignalen) och svarar med att svänga på ett visst sätt (utsignalen), Temperaturen i en ugn varierar på ett visst sätt (insignalen) och steken "svarar" med att få en viss tidsberoende temperaturfördelning inom sig (utsignalen). Exempelen kan med lätthet mångfaldigas.⁹

Schematiskt kan man teckna detta

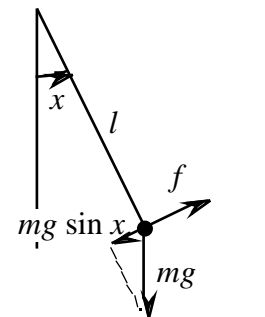


där $x(t)$ får stå för insignalen, L för själva "processorn" – eller *systemet* som man hellre säger – och $x_L(t)$ för utsignalen.

En modell för en enkel pendel som påverkas av en yttre kraft f som markerad i figuren. Sambandet mellan pendelrörelsen $x(t)$ (insignalen) och kraften $f(t)$ ges enligt Newtons kraftlagar av differentialekvationen:

$$mlx''(t) + mg \sin x(t) = f(t).$$

Observera att systemet matematiskt sett förvandlar *funktioner* till *funktioner*. Inom matematiken kallar man gärna sådana processer för *operatorer*. Operatortorn det handlar om i pendelexemplet är den som förvandlar $x(t)$ till räkneuttrycket i ekvationens vänsterled.



Accelerationen = lx''



En mycket viktig klass av av sådana processer är de så kallade *linjära, tidsinvarianta systemen* (LTI-systemen).¹⁰ Sådana karakteriseras av

1° (*Linjaritet*)

Om en insignal $z(t)$ är en linjär kombination av två insignaler $x(t)$ och $y(t)$,

$$z(t) = ax(t) + by(t), \quad a \text{ och } b \text{ konstanter,}$$

så är utsignalen $z_L(t)$ samma linjära kombination av $x_L(t)$ och $y_L(t)$:

$$z_L(t) = ax_L(t) + by_L(t)$$

2° (*Tidsinvarians*)

Om insignalen förskjuts i tiden, dvs. om $x(t)$ ersätts med $x(t - \tau)$, där τ är en reell konstant,¹¹ så kommer också utsignalen att förskjutas lika mycket i tiden:

$$y(t) = x(t - \tau) \quad y_L(t) = x_L(t - \tau)$$

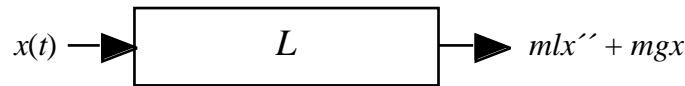
och ett tredje villkor, ett slags kontinuitetsvillkor, vars matematiska formulering vi inte går in på här, men som intuitivt innebär att "små" förändringar i insignalen bara föranleder "små" förändringar i utsignalen.

Systemet i pendelexemplet ovan är inte av LTI-typ eftersom sinusfunktionen inte är linjär. Men för små utslagsvinklar har man att $\sin x \approx x$. Med den approximationen får man systemet

⁹ Se också kursboken i ljud- och vibrationslära, exempel 3-6 där insignalerna är de krafter som exciterar en bil. Dessa förorsakar vibrationshastigheterna på olika ställen i bilen – utsignalerna.

¹⁰ Se också §3.3 i läroboken i ljud- och vibrationslära.

¹¹ $x(t - \tau)$ är samma signal som $x(t)$ fast avsänd τ tidsenheter senare (om $\tau > 0$).



som är av LTI-typ. (Kontrollera att villkoren 1° och 2° är uppfyllda.)

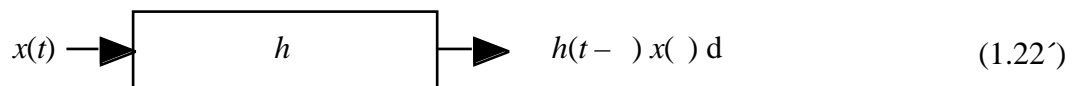
Kravet på att processen skall vara tidsinvariant är i många fall mycket naturligt – en radiomottagare exempelvis förväntas ju bete sig likadant igår som idag och imorgon. Likaså vill man kunna hantera steken i ugnen på samma sätt oavsett när man vill laga till den. Kravet på linjaritet torde vara svårare att tillgodose i praktiken, men det är trots allt i många fall uppfyllt med god approximation om man håller sig till signaler med måttligt energiinnehåll. En bra förstärkare bör till exempel fungera linjärt, åtminstone inom sitt arbetsområde.

Anmärkningsvärt är nu att det finns ett generellt sätt att i formler uttrycka hur LTI-system fungerar och att det dessutom finns en nära koppling mellan LTI-system och fouriertransformen:

- Man kan visa att det till varje LTI-system finns en (eventuellt generaliserad)¹² funktion $h(t)$ av reell variabel, så att

$$x_L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (1.22)$$

Omvänt är systemet



(med måttliga regularitetskrav på h och x) ett LTI-system. (Kontrollera villkoren 1° och 2°!)

Anmärkning: Integralen i (1.22) kan tolkas intuitivt som att man vid varje tidpunkt t "linjärkombinerar" de oändligt många funktionsvärdena $x(\tau)$. Linjärkombinationens koefficienter beror av tiden t och ges av $h(t - \tau)$.

Funktionen h karakteriserar alltså LTI-systemet fullständigt och den kallas, av skäl som vi kommer till senare, *systemets pulssvar*. Räkneoperationen i högerledet i (1.22) spelar självfallet en viktig roll i dessa sammanhang och man har gett också den ett särskilt namn. Man säger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau \text{ är } \textit{faltningen}^{13} \text{ av funktionerna } h(t) \text{ och } x(t)$$

och skriver
$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau = h(t) * x(t). \quad (14) \quad (1.23)$$

Alltså



Faltningen visar sig ha många intressanta egenskaper. En nämner vi redan nu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau,$$

dvs.
$$h(t) * x(t) = x(t) * h(t). \quad (1.24)$$

(Kontrollera att detta är riktigt – betrakta t som en konstant och substituera τ mot $t - \tau$ i en av integralerna.)

¹² Vad detta är kommer vi till i kapitel 4 i arbetsmaterial 3.

¹³ Engelska och franska: *convolution*, tyska: *Faltung*.

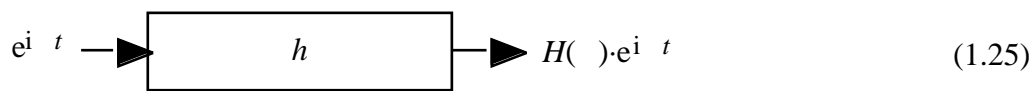
¹⁴ I kursboken i ljud- och vibrationslära skrivs $x(t) \circ y(t)$.

- Om man som insignal till ett LTI-system tar en harmonisk svängning $x(t) = e^{i\omega t}$, så får man som utsignal

$$h(t) * e^{i\omega t} = e^{i\omega t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{i\omega t} e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \cdot e^{i\omega t} = H(\omega) \cdot e^{i\omega t},$$

där $H(\omega)$ tydligen är fouriertransformen av pulssvaret $h(t)$:



Utsignalen av en harmonisk funktion av viss frekvens är alltså en harmonisk funktion med samma frekvens.

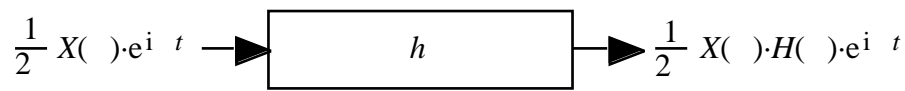
De harmoniska funktionerna $e^{i\omega t}$ är egenfunktioner till *alla(!)* LTI-system. Motsvarande egenvärde ges av fouriertransformen för systemets pulssvar.

Funktionen $H(\omega)$ brukar kallas *systemets överföringsfunktion*.

Låt nu $x(t)$ vara en "godtycklig" insignal och $y(t)$ dess utsignal. Enligt syntesekvationen (1.7) har vi,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Kombinerar man detta med linjariteten hos LTI-systemen, så får man



och efter integration

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} H(\omega) \cdot X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = y(t).$$

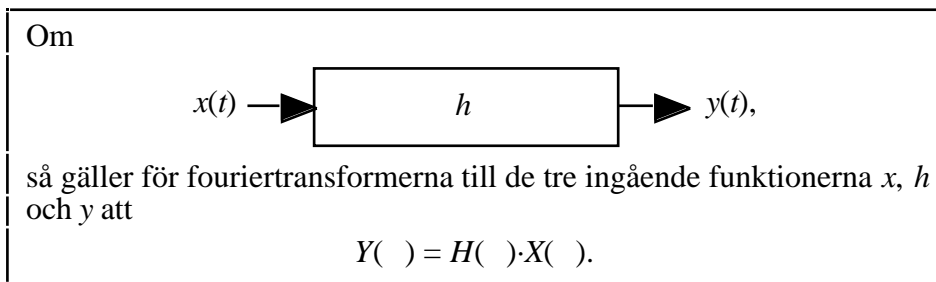
Men enligt syntesekvationen, som ju också gäller för funktionen $y(t)$, är

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

vilket innebär att

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega). \tag{1.26}$$

Sammanfattningsvis:



Detta mycket generella samband är utgångspunkten till en idé om hur man kan ta reda på hur ett förelagt LTI-system fungerar. Dvs. man vill veta hur man till given insignal beräknar dess utsignal. Enligt (1.22) räcker det då att bestämma systemets pulssvar.

Vi tänker oss att systemet levereras som en ”svart låda” vars inandöme är oåtkomligt för oss. Det enda vi kan göra med den är att skicka in signaler och mäta upp motsvarande utsignaler. Följande checklista kan då användas.

- 1° Skicka in en känd insignal $x(t)$ och mät upp utsignalen $y(t)$.
- 2° Beräkna fouriertransformerna $X(\omega)$ och $Y(\omega)$ – analysekvationen (1.8) talar om hur detta görs.
- 3° Bilda kvoten $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ – detta ger fouriertransformen för det sökta pulssvaret.
- 4° Beräkna pulssvaret $h(t)$ – syntesekvationen (1.7) talar om hur detta görs.
- 5° Med hjälp av pulssvaret kan man sedan förutsäga vilken utsignal $u(t)$ som man får om en signal $z(t)$ – vilken som helst! – skickas in i systemet,

$$u(t) = h(t) * z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) z(\tau) d\tau.$$

Obs dock att detta bara en skissartad beskrivning av ett tänkbart förfarande. En hel del beräkningstekniska komplikationer kan tillstöta. Exempelvis kan $X(\omega) = 0$ betydande delar av ω -axeln och då kan divisionen under punkt 3 inte utföras där.

Om innehållet i arbetsmaterialet för övrigt

I de följande avsnitten tittar vi närmare på det matematiska hantverket som hör till de metoder som beskrivits i den här inledningen.

Kap 2 tar upp geometriska aspekter på signalers grafer och inför ett par speciella funktioner med vars hjälp man t.ex. enkelt kan ”klippa av” signaler.

Kap 3 handlar om periodiska funktioners enklaste egenskaper och om begreppet ”periodisk fortsättning”.

I kap 4 (arbetsmaterial 3) införs de så kallade generaliserade funktionerna. Det har nämligen visat sig att de ”vanliga” funktionerna inte helt duger för att på ett bra sätt beskriva alla tänkbara signaler – dessa generaliserade funktioner passar bättre.

Kap 5 (arbetsmaterial 4) tar upp några viktiga summationsformler. Dessa utgör grunden i fouriermetoderna.

Kap 6 handlar om komplexa fourierserier och fourierserietransformen.

Och slutligen handlar

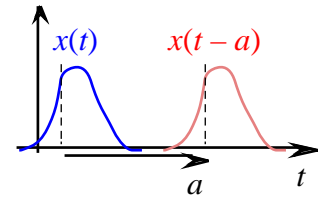
kap 7 (arbetsmaterial 5) om fouriertransformen och dess egenskaper.

2. Geometriskt om grafer

En av den här kursens syften är att ge de viktigaste matematiska metoderna som man använder för att bearbeta signaler av olika slag. Ofta är det så att den signal som man iakttar inte är den egentliga, utan det man ”ser” är någon slags deformation, förvrängning eller stympning av den ”riktiga”. Det är därför viktigt att på olika sätt kunna ”manipulera” grafiska bilder av signaler. Varje sådan manipulation har en analytisk (d.v.s. ”formelmässig”) motsvarighet. Vi går igenom några enkla men viktiga sådana fall. Signalen själv tänker vi oss beskriven av en funktion $x(t)$, där t ofta har (men inte måste ha) dimensionen tid.¹⁵ Grafiskt låter vi x -axeln vara vertikal och t -axeln horisontell.

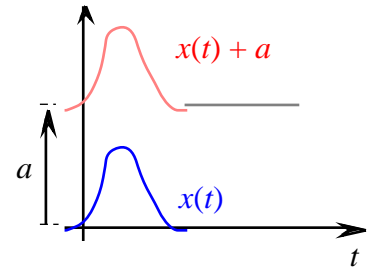
2.1 Translation i horisontell led, $x(t - a)$

Om $x(t)$ förskjuts a enheter i t -axelriktningen, så får man grafen för $x(t - a)$.



2.2 Translation i vertikal led, $x(t) + a$

Om grafen för $x(t)$ förskjuts a enheter i x -axelriktningen, så får man grafen för $x(t) + a$.

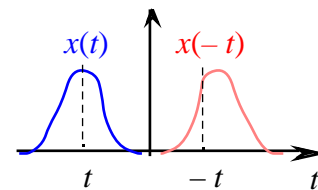


2.3 Spegling i vertikala axeln, $x(-t)$

Om grafen för $x(t)$ speglas i x -axeln, så får man grafen för $x(-t)$. Funktioner vars grafer övergår i sig själva vid en sådan spegling kallas *jämna funktioner*. Analytiskt:

$$x(t) \text{ jämn} \quad x(t) = x(-t). \quad (2.1)$$

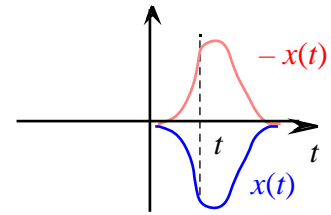
Exempel på jämna funktioner: 1 , t^2 , t^n där n ett jämnt heltal, $\cos t$, $\sin^2 t$, $|t|$ och $\frac{\sin t}{t}$.



¹⁵ I själva verket räcker funktionsbegreppet, så som det brukar definieras t.ex. i 1:ans grundkurser, inte riktigt för signalteorins behov, men det problemet tar vi upp först senare.

2.4 Spegling i horisontella axeln, $-x(t)$

Om grafen för $x(t)$ speglas i t -axeln, så får man grafen för $-x(t)$.



2.5 Vridning ett halvt varv kring origo, $-x(-t)$

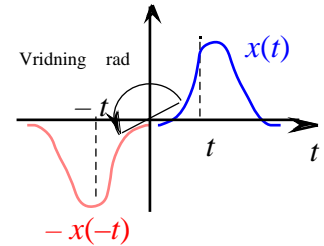
Om grafen för $x(t)$ vrids ett halvt varv kring punkten $(0,0)$ i tx -planet, så får man grafen för $-x(-t)$.

Funktioner vars grafer övergår i sig själva vid en sådan vridning kallas *udda funktioner*. Analytiskt:

$$x(t) \text{ udda} \quad -x(t) = x(-t). \quad (2.2)$$

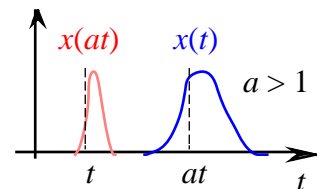
Exempel på udda funktioner: t, t^3, t^n där n ett udda heltal,

$$\sin t, \tan t, \operatorname{sign} t = \frac{t}{|t|}$$



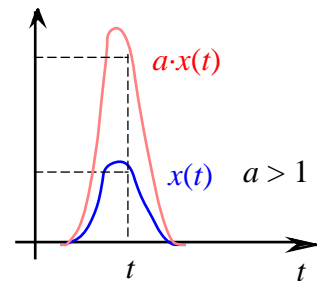
2.6 Skalning i horisontell led, $x(at)$

Om grafen för $x(t)$ trycks ihop (resp. töjs) så att avstånden till x -axeln blir $\frac{1}{a}$ ggr mindre ($a > 1$) resp. större ($0 < a < 1$), så får man grafen för $x(at)$,



2.7 Skalning i vertikal led, $a \cdot x(t)$

Om grafen för $x(t)$ töjs (resp. trycks ihop) så att avstånden till t -axeln blir a ggr större ($a > 1$) resp. mindre ($0 < a < 1$), så får man grafen för $a \cdot x(t)$.

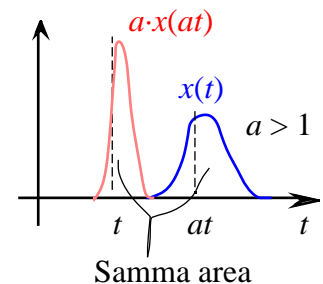


2.8 Areabevarande skalning, $a \cdot x(at)$

Grafen för $a \cdot x(at)$, $a > 1$, erhålls genom att grafen för $x(t)$ trycks ihop i t -led och töjs i x -led. "Areorna" mellan graferna och t -axeln är då densamma i båda fallen, ty

$$a \cdot x(at) dt = \text{Subst } at \quad t = \quad x(t) dt.$$

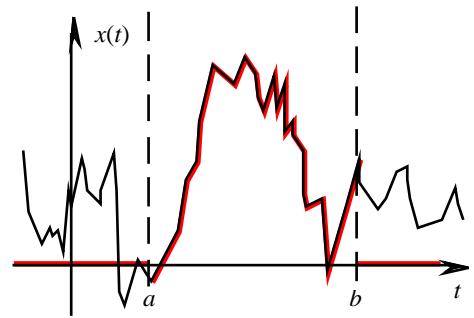
(Detsamma gäller om $0 < a < 1$, men då är det fråga om töjning i t -led och hoptryckning x -led.)



2.9 Trunkering¹⁶. Rektangelfunktioner

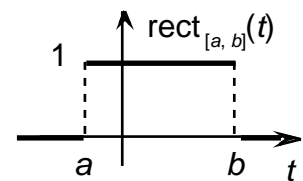
Om en signal iakttas under ett kortare tidsintervall än sin totala varaktighet, så har man att göra med en trunkerad signal. I figuren här bredvid har man "skurit ut" den del (**fet linje**) av signalgrafnen $x(t)$ (tunn linje) som ligger i intervallet $a < t < b$ och "glömt" den del som ligger utanför intervallet. Analytiskt kan man beskriva detta genom att införa den "trunkerade" funktionen:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & \text{då } a < t < b, \\ 0, & \text{då } t > b \text{ eller } t < a. \end{cases} \quad (17)$$



Ofta vill man dock så långt möjligt undvika att använda klammersymbolen. Man kan få en mera koncis beskrivning av den trunkerade funktionen genom att till menageriet av standardformler foga s.k. *rektangelfunktioner*:

Om $a < b$
$$\text{rect}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } a < t < b, \\ 0, & \text{då } t > b \text{ eller } t < a. \end{cases}$$



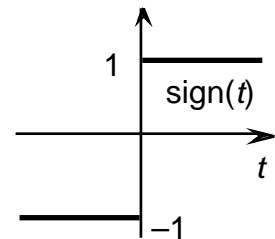
Den trunkerade funktionen ges då av

$$x_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}_{[a,b]}(t).$$

Rektangelfunktionerna hör till de *sträckvis konstanta* funktionerna och är nära släkt med två andra sådana funktioner, som också fått något så när vedertagna namn:

Signumfunktionen:

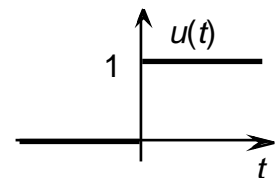
$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 < t, \\ -1, & \text{då } t < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$



(Skrivningen $\text{sgn}(t)$ används också.)

Enhetsprånget, ("the unit-step-function", Heavisides funktion¹⁸)

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 < t, \\ 0, & \text{då } t < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$



Man har att

$$\text{sign}(t) = 2u(t) - 1, \quad u(t) = \frac{\text{sign}(t) + 1}{2},$$

och om $a < b$
$$\text{rect}_{[a,b]}(t) = u(t-a) - u(t-b) = u(t-a) \cdot u(b-t). \quad (\text{Kontrollera detta!})$$

¹⁶ Ordet betyder "avhuggning" och kommer ursprungligen från det latinska verbet för "hugga av", *trunco*. På engelska heter det *truncation*.

¹⁷ Den nogranne undrar kanske vad som händer med x 's värden för $t = a$ och b . Det problemet (som egentligen inte är något problem) kommenteras närmare längre fram.

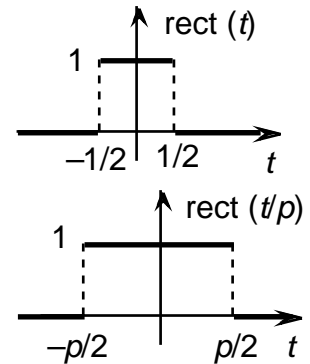
¹⁸ Efter *Oliver Heaviside*, brittisk fysiker och ingenjör, 1850 – 1925. Införde funktionen ifråga vid sina kalkyler inom ellära. Beteckningen för den är tyvärr inte standardiserad (än?). I amerikansk litteratur skrivs som ovan ofta u . En annan vanlig beteckning är H , medan uppslagsverket använder sig av !

Vi använder också beteckningen

$$\text{rect}(t)$$

för $\text{rect}_{[-1/2, 1/2]}(t)$, d.v.s. för rektangelfunktionen som är = 1 i ett intervall av längd 1, symmetriskt beläget kring origo. Funktionen i fråga är jämn.

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases} \quad (2.5)$$



Övningar:

2.1 Skissera i samma diagram graferna till:

a. $\sin t$, $\sin 2t$ och $\sin \frac{t}{2}$,

b. $\sin t$, $2 \sin t$ och $\frac{1}{2} \sin t$.

2.2 a. Skissera grafen till

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t - 1|, & \text{då } 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{då } t > 2 \text{ eller } t < 0 \end{cases} \quad (*)$$

och skissera sedan graferna för

b. $y(t) = x(-t)$, c. $y(t) = -x(t)$, d. $y(t) = -x(-t)$,

e. $y(t) = x(2t)$, f. $y(t) = x(t/2)$, g. $y(t) = x(t + 1)$,

h. $y(t) = 10 x(10t)$, i. $y(t) = (x(t))^{100}$.

j. Ge en "formelbeskrivning" i samma stil som (*) för funktionen $y(t) = x(2t)$.

2.3 a. Verifiera att $y(t) = x(t) + x(-t)$ är en jämn och att $z(t) = x(t) - x(-t)$ är en udda funktion.

b. Eftersom $x(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} + \frac{x(t) - x(-t)}{2}$, så kan tydligen varje funktion skrivas som en Hsumma av en jämn och en udda funktion. Visa att det bara finns en sådan omskrivning, d.v.s. om

$$x(t) = x_j(t) + x_u(t), \text{ där } x_j \text{ är jämn och } x_u \text{ udda,} \quad (**)$$

så är

$$x_j(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \text{ och } x_u(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

Ledning: Kombinera likheten (**) med den man får då t byts mot $-t$.

Funktionerna x_j och x_u i uppgift 2.3b. brukar kallas den *jämna* respektive *udda delen* av funktionen x .

De betecknas ibland $\mathcal{E}v\{x(t)\}$ respektive $\mathcal{O}d\{x(t)\}$.

2.4 Vilka är de jämna respektive udda delarna till

a. e^t , b. e^{it} , c. $\frac{1}{1-t}$.

2.5 Verifiera att

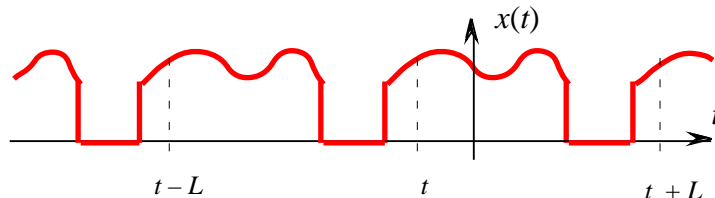
a. $\text{rect}_{[-L/2, L/2]}(t) = \text{rect}(t/L)$, b. $\text{rect}_{[a, b]}(t) = \text{rect} \frac{2t - a - b}{2(b - a)}$.

3. Om periodiska funktioner och periodisk fortsättning

Man säger att en funktion $x(t)$ är *periodisk* med *periodlängd* L (eller kortare *L-periodisk*) om

$$L > 0 \text{ och } x(t + L) = x(t) \text{ för alla } t.$$

Graferna för sådana funktioner karakteriseras tydligen (jämför §2.1 ovan) av att de övergår i sig själva då de förskjuts $L, 2L, 3L, \dots$ längdenheter i åt vänster eller höger.



Välkända exempel på periodiska funktioner är de trigonometriska funktionerna $\cos t$ och $\sin t$ (2 -periodiska), samt $\tan x$ och $\cot x$ (π -periodiska). Mera udda exempel utgör konstanterna, $x(t) = C$, som tydligen är L -periodiska för vilket L som helst.

Om en funktion är L -periodisk så är den automatiskt också $2L$ -periodisk, $3L$ -periodisk, $4L$ -periodisk o.s.v. – exempelvis är $\tan t$ också 2π -periodisk. Bortsett från de konstanta funktionerna, så kan man visa att det i alla i praktiken intressanta fall alltid finns en *minsta positiv* period till varje periodisk funktion.¹⁹ Den periodlängden kallas *fundamentalperioden*. För de trigonometriska funktionerna i det föregående stycket angavs just deras fundamentalperioder. Konstanterna har ingen fundamentalperiod.

Övningar:

3.1 Bestäm fundamentalperioderna till

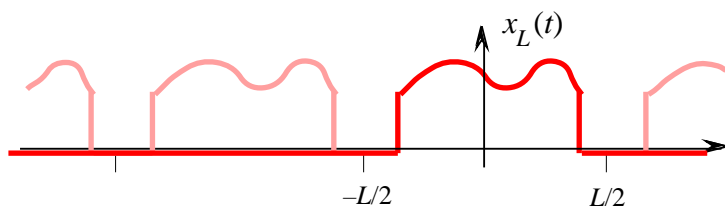
a. $\cos t \sin t,$

b. $|\cos t|,$

c. $\tan t.$

3.2 Verifiera att $x(t) = t - \{t\}$, där $\{t\}$ = största heltal $\leq t$, är periodisk och ange dess fundamentalperiod.

Om man från grafen till en L -periodisk funktion ersätter allt som ligger utanför ett t -intervall med längden L , t.ex. intervallet $-L/2 < t < L/2$, med motsvarande del av t -axeln så kan man säga att man har ”skurit ut” en period av grafen,



Analytiskt kan man beskriva denna ”stympning” med, att man bildar funktionen

$$x_L(t) = \begin{cases} x(t), & \text{om } -L/2 < t < L/2, \\ 0, & \text{för alla övriga } t. \end{cases} = x(t) \cdot \text{rect}(t/L).$$

¹⁹ Mera precist gäller: Om en icke-konstant funktion $x(t)$ är periodisk och kontinuerlig i åtminstone en punkt så har funktionen en minsta positiv period som alla andra är heltalsmultipler av. Beviset för detta är inte alldeles enkelt och utelämnas.

Man säger att $x(t)$ är den L -periodiska fortsättningen till $x_L(t)$. Funktionen $x(t)$ kan återskapas från $x_L(t)$ genom att man adderar funktionerna $x_L(t - nL)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

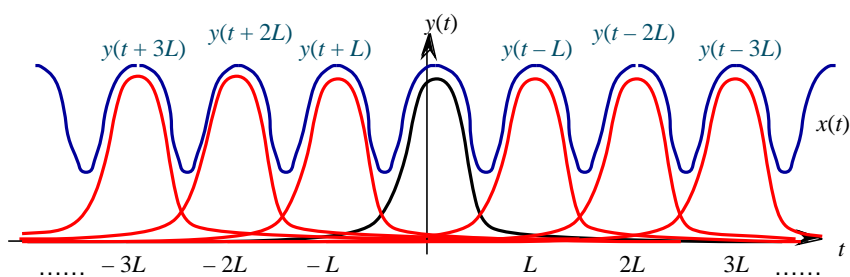
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_L(t - nL). \quad (3.1)$$

Lägg märke till att en funktion $x(t)$ som är definierad av ett samband av typen (3.1) alltid är L -periodisk – och detta alldeles oavsett vilken funktion x_L man utgår ifrån – bara den oändliga serien konvergerar.

Mera generellt har man kommit överens om:

Definition: (Periodisk fortsättning av funktion)

Funktionen $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nL)$ sägs vara den L -periodiska fortsättningen av funktionen $y(t)$ – förutsatt att serien är konvergent.

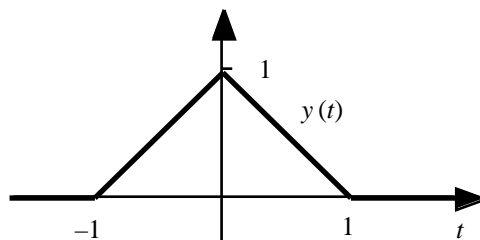


Exempel 3.1

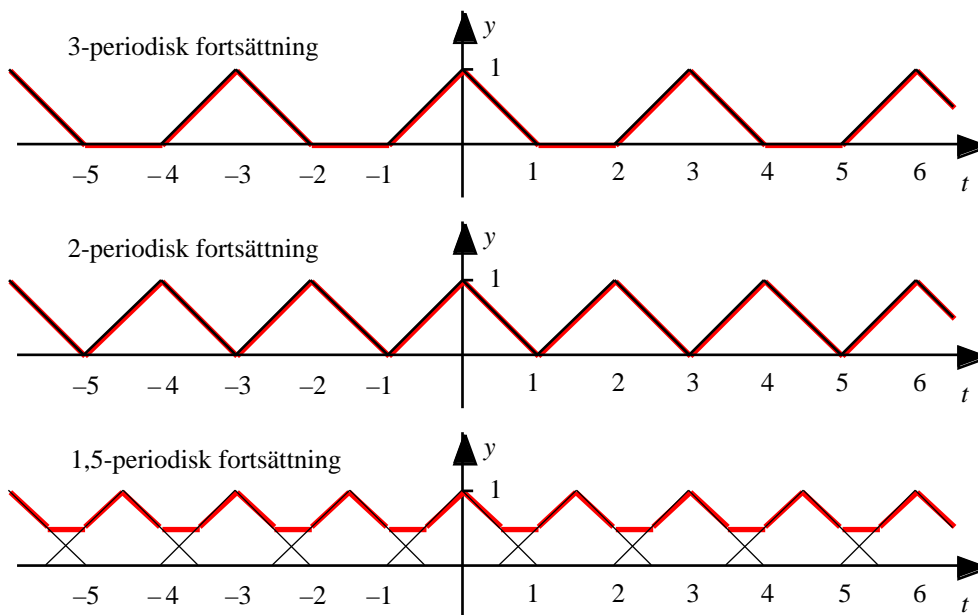
Grafen av funktionen

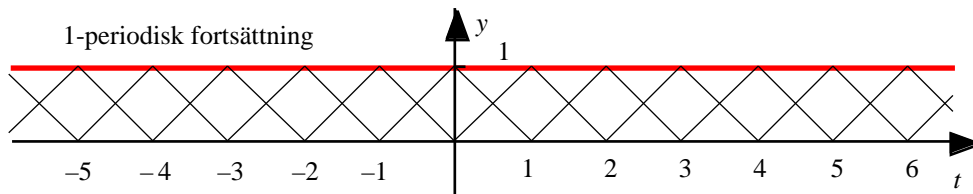
$$y(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{då } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{då } |t| > 1, \end{cases}$$

har skissats i figuren här bredvid.



De L -periodiska fortsättningarna till denna för $L = 3, 2, 3/2$, och 1 har då följande grafer: (Kontrollera detta som en övning!)





Övningar:

3.3 Skriv upp analytiska uttryck för de 3-, 2- och 1,5-periodiska fortsättningarna i exemplet ovan. Välj att göra detta i intervall symmetriska kring origo och med respektive fundamentalperiods längd.

3.4 Skissera den 3-periodiska fortsättningen till

$$x(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{då } |t| \leq 1, \\ |t| - 1, & \text{då } 1 < |t| \leq 2, \\ 0, & \text{då } |t| > 2. \end{cases}$$

3.5 Vilken är den 1-periodiska fortsättningen av

$$x(t) = \begin{cases} 2^{-t}, & \text{då } t > 0, \\ 0, & \text{då } t \leq 0, \end{cases}$$

i fundamentalintervallet $0 < t < 1$?

Ledning: $1 + k + k^2 + \dots + k^n + \dots = 1/(1 - k)$ om $|k| < 1$.

Svar till övningarna:

1.2 b. $x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)t}$.

1.3 b. $A_n = a_n$ och $b_n = 0$.

1.4 a. $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2i|n|}$, då $n \neq 0, c_0 = 0$.

b. $a_n = 0, n \neq 0, b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \neq 0$.

1.5 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ och $c_n = \frac{1}{2} x(\frac{\pi}{2}) e^{-in\pi/2}$.

1.6 a. $c_n = \frac{(-1)^n}{2n^2}$, då $n \neq 0, c_0 = 0$.

b. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, a_0 = b_n = 0, n \neq 0$.

1.7 a. $\frac{\sin \pi/2}{\pi/2}$, om $n=0$, 1 om $n \neq 0$.

b. $\frac{1}{1+i}$.

c. $\frac{1}{1-i}$.

d. $\frac{2}{1+i^2} \dots$ (Observera att funktionen i uppgift d är summan av dem i uppgifterna b och c.)

1.8 $d_m = \frac{25\sqrt{3}}{18} \approx 2.4056, d_2 = \frac{5\sqrt{210}}{168} \approx 0.4313$.

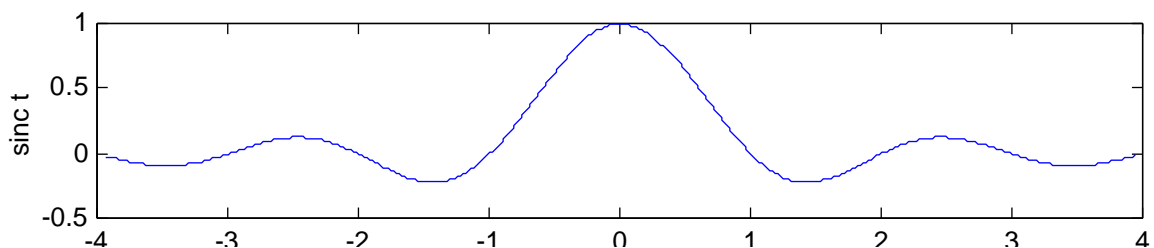
1.9 $\sqrt{2}, \sqrt{2/3}$ och $2\sqrt{2}/(3\sqrt{5})$ respektive $1, \sqrt{1/3}$ och $2/(3\sqrt{5})$.

1.10 a. $\frac{2}{6}$,

b. $\frac{4}{90}$.

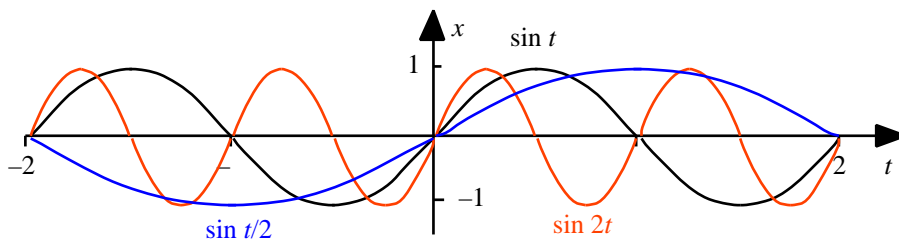
1.11 a. 2 .

b. Integralens värde = 1, nollställena är heltalpunkterna utom $n=0$.

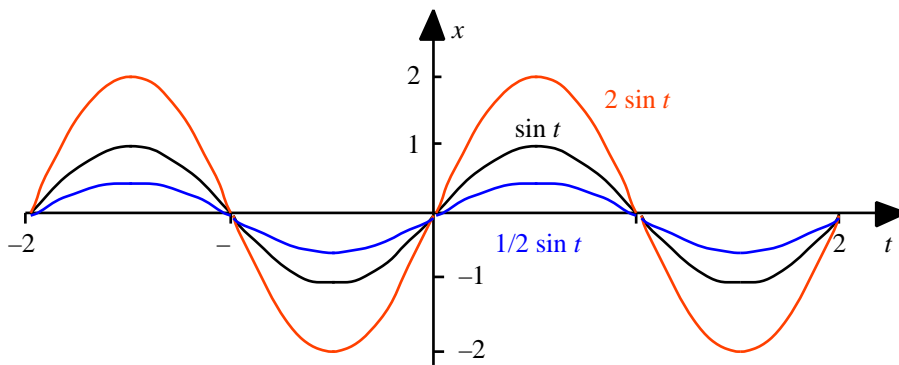


1.12 $X(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}, Y(\omega) = \frac{1}{a-i\omega}, Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$. Integralens värde: $\frac{2a^3}{3}$.

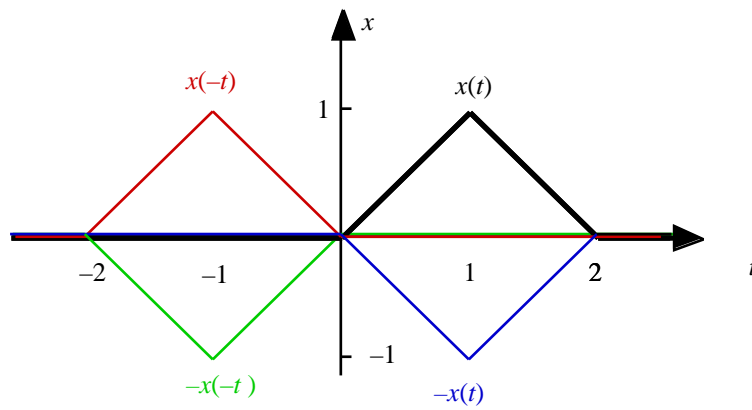
2.1 a.



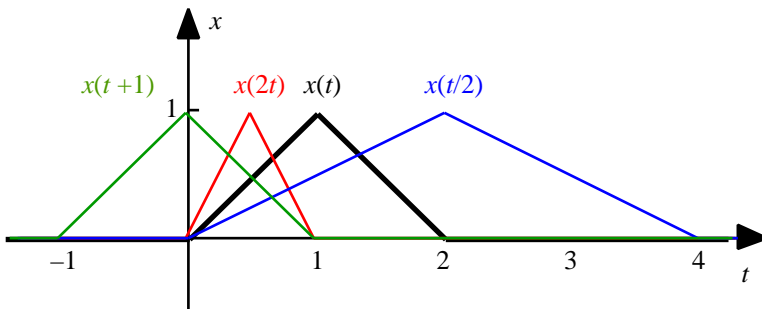
b.



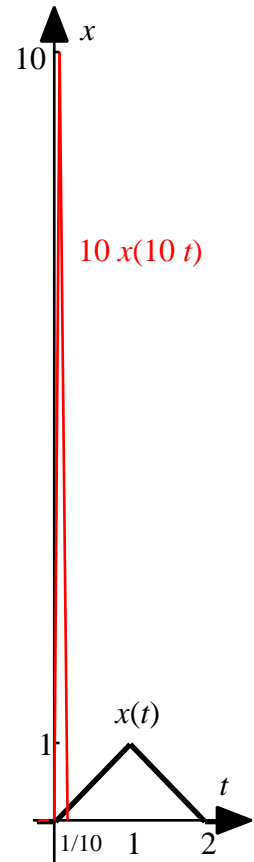
2.2 a. – d.



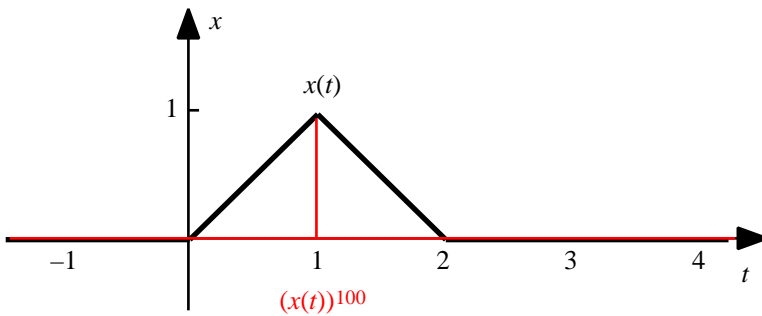
a., e. – g.



a., h.



a., i.



2.3 b. $x(t) = x_j(t) + x_u(t)$ $x(-t) = x_j(-t) + x_u(-t) = x_j(t) - x_u(t)$. Summation och subtraktion av dessa likheter ger $x(t) + x(-t) = 2x_j(t)$ och $x(t) - x(-t) = 2x_u(t)$.

2.4 a. $\cosh t$ och $\sinh t$, b. $\cos t$ och $i \cdot \sin t$, c. $\frac{1}{1-t^2}$ och $\frac{t}{1-t^2}$.

2.5 a. Obs. att man får grafen för rect_P om man töjer (drar ihop) grafen för rect_1 med en faktor P .
 b. Obs. att man får grafen för $\text{rect}_{[a, b]}$ om man förskjuter rect_P där $P = b - a$ med $(a + b)/2$ åt höger (om detta tal > 0 , annars åt vänster).

3.1 a. , b. , c. 1.

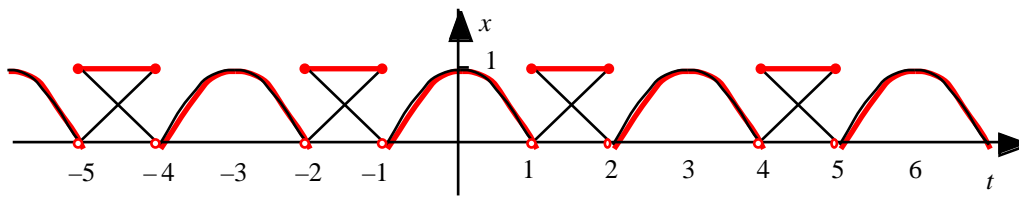
3.2 Fundamentalperioden är =1.

3.3 3-periodiska fortsättningen:
 $y_3(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{då } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{då } 1 < |t| \leq 1,5, \end{cases} \quad y_3(t) = y_3(t - 3).$

2-periodiska fortsättningen:
 $y_2(t) = 1 - |t|, \text{ då } |t| \leq 1, \quad y_2(t) = y_2(t - 2).$

1,5-periodiska fortsättningen:
 $y_{3/2}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{då } |t| \leq 0,5, \\ 0,5, & \text{då } 0,5 < |t| \leq 0,75, \end{cases} \quad y_{1,5}(t) = y_{1,5}(t - 1,5).$

3.4



3.5 $x_1(t) = 2^{-(t-1)}$, då $0 < t < 1$.