Institutionen för matematik, KTH 050210
Arbetsmaterial 3 för 5B1207/VT05/E.P.

4. Om matematisk beskrivning av signaler

4.1. Informell inledning. δ-funktioner och generaliserade funktioner

En ”signal” är för oss ett samlingsnamn på någon mätbar storhet som beror på en reell variabel (ofta med tidsdimension).

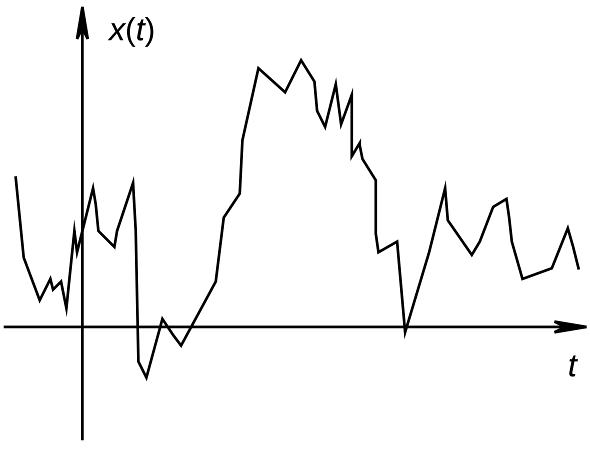
Exempelvis:

[1] ett varierande lufttryck vid någon punkt i rummet (ljudsignal),
[2] ett varierande strömstyrka (eller spänning) i en elektrisk ledning (telefonsignal),
[3] ett varierande elektromagnetiskt fält i en viss punkt i rummet (radiosignal, ljussignal),

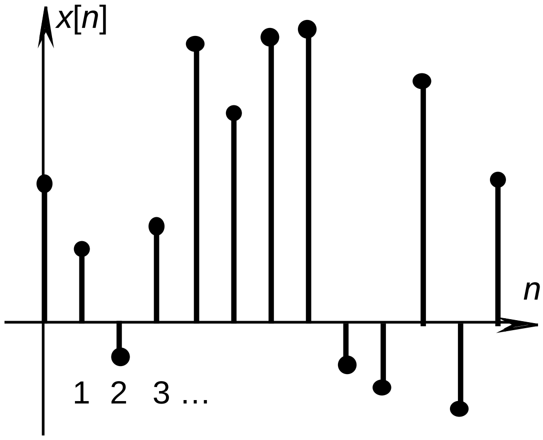
I dessa fall har man vid varje tidpunkt t en signalstyrka x och det är naturligt att försöka beskriva signalen med en funktion $x(t)$ av den *reella* variabeln t. Sådana signaler brukar kallas *tidskontinuerliga*.

[4] en följd av tal eller tecken (från något alfabet) som kommer med ett visst antal per sekund (digital signal).

Signaler av det senare slaget brukar kallas *tidsdiskreta*. Eftersom ett antal tecken alltid kan ”kodas” med tal så kan en sådan signal alltid beskrivas matematiskt som en talföljd. Om de olika tecknen inkommer vid tidpunkterna $0, T, 2T, \dots, nT, \dots$, kan man skriva t.ex $x(0), x(T), x(2t), \dots, x(nT), \dots$, för den talföljden. Om ”steglängden” T är känd eller ointressant kan man man lika gärna beteckna $x(nT)$ med x_n, eller, som det är kutym i signalteoretiska skrifter, med $x[n]$. Klammerparentesen skall påminna om att n är en *heltalsvariabel* i motsats till den *reella variabeln* t i $x(t)$.

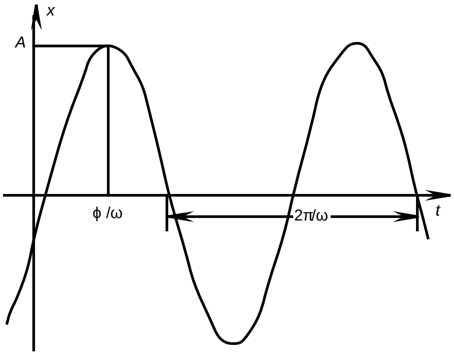


Tidskontinuerlig reell signal



Tidsdiskret reell signal

Intensitetsvariabeln x uppfattar man kanske gärna också som en reell variabel, men det har visat sig lämpligt att i allmänhet låta den vara en *komplex* storhet: En ideal växelström beskrivs exempelvis egentligen av en funktion av av typen $x_r(t) = A\cos(\omega t - \phi)$, där $\omega/2\pi$ är frekvensen, ϕ fasvinkeln och A amplituden, men man föredrar att uppfatta signalen som en linjär kombination av komplexa exponentialfunktioner:



$$x(t) = \frac{Ae^{-i\omega\phi}}{2}\, e^{i\omega t} + \frac{Ae^{i\omega\phi}}{2}\, e^{-i\omega t}$$

En viktig anledning till det speciella intresset för just de komplexa exponentialfunktionerna är den roll de spelar som egenfunktioner till LTI-system (se (1.21) i avsnitt 1.4) och att (oändliga) linjärkombinationer av dem kan framställa vilka som helst signaler (syntesekvationen (1.5) för fourierintegraler).

Som *ett första försök* till en generell matematisk modell för signaler skulle man kunna ta:

- [a] En tidskontinuerlig signal motsvaras alltid av någon komplexvärd funktion $x(t)$ av en reell variabel t.
- [b] En tidsdiskret signal motsvaras alltid av någon följd av komplexa tal, $x[n]$, n heltal.

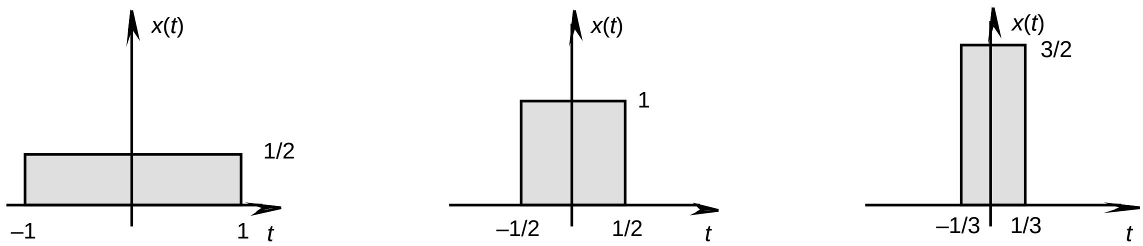
Det har dock visat sig att [a]-delen är alltför inskränkande för att täcka behoven – somliga signaler har just ingen varaktighet utan kommer som en ”impuls” på ”nolltid”. En sådan signal låter sig inte beskrivas av någon funktion, i varje fall inte som begreppet ”funktion” definierats i den ”klassiska” analysen. Innan vi modifierar [a] på ett passande sätt måste vi därför diskutera denna typ av signaler litet närmare.

Med *impulsen* hos en tidskontinuerlig signal $x(t)$ av typen [a] under tidsintervallet $a \le t \le b$ menar man värdet av integralen

$$\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t. \quad (4.1)$$

[1]

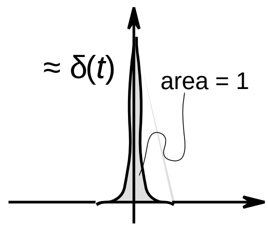
Om $x(t) = 0$ utanför intervallet $a \le t \le b$ så är värdet av integralen (4.1) dess *totala* impuls.

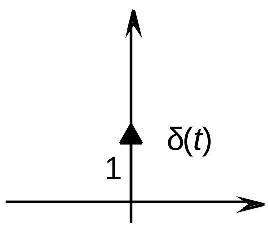


Signalerna $x(t)$ med grafer som i figurerna ovan har alla samma totala impuls 1, men olika varaktighet (2, 1 resp 2/3 tidsenheter). Med *signalens varaktighet* menas då längden av det kortaste intervall utanför vilket den är = 0.

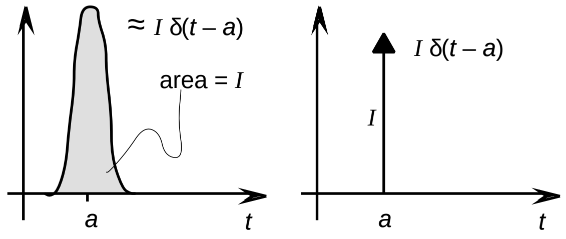
För att smidigt kunna hantera signaler med mycket kort varaktighet, men med total impuls ≠ 0 har man inom matematiken skapat därtill speciellt anpassade begrepp – de så kallade *generaliserade funktionerna* eller *distributionerna*. En strikt matematisk definition av dessa skulle föra oss för långt bort från den här kursens önskade innehåll, så vi nöjer oss med en mera intuitiv beskrivning av dem.

En signal som kommer vid tiden $t = 0$ med total impuls 1 och varaktighet 0 motsvaras av den så kallade *deltafunktionen* $\delta(t)$.
Approximativt svarar signalen mot en puls som den i den vänstra figuren här bredvid och δ-funktionen själv kan gärna llustreras grafiskt som i den högra figuren med en uppåtriktad pil utgående från origo med längd 1.





[1] Ordet ”impuls” får inte alltid tas bokstavligt i fysikalisk mening (något med dimensionen kraft × tid) – för t.ex. en elektrisk signal, där x betecknar strömstyrkan, så kommer ”impulsen” att vara den laddningsmängd som passerat under tidsintervallet.



På motsvarande sätt kommer en impuls av storleken I, som kommer vid tidpunkten a att motsvaras av den generaliserade funktionen

$$I \cdot \delta(t - a)$$

Vi kallar dessa signaltyper *deltapulser*[2]. Punkten a kallas pulsens *singularitet*. Man överenskommer vidare att $\delta(t - a) = 0$ då $t \neq a$ och *saknar* värde då $t = a$.

Observera att δ-pulserna inte är några funktioner i ”vanlig” mening! För en ”vanlig” funktion $x(t)$ som är = 0 då $t \neq 0$, så är $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 0$, medan det för δ-pulsen förväntas gälla att $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 1$.
δ-pulsen är alltså en ”nytt” sorts begrepp – en *generaliserad funktion*.

Litet slarvigt (men träffande) kan man säga att

[a'] *tidskontinuerliga signaler är, matematiskt sett, uppbyggda av summor av funktioner av en variabel och deltapulser samt deras derivator*[3].

Övning 4.1:

Låt $x(t) = \sin \pi t$, då $-1 \leq t \leq 1$ och = 0 för övriga t-värden. Rita graferna för

a. $x(t + 1) + \delta(t - 2)$, b. $x(t - 1) - \delta(t + 2)$, c. $\sum_{k=-2}^{2} k\,\delta(t - k + 1/4)$.

Innan vi går vidare med signalteorin måste vi titta litet närmare på

4.2 Egenskaper hos generaliserade funktioner och hur man räknar med dem[4]

4.2.1. Integration av δ-pulser

Deltapulserna kan integreras över intervall där ändpunkterna är ≠ den singulära punkten:
Betrakta t.ex. pulsen $\delta(t)$. Om $b \leq t \leq c$ är ett intervall som har den singulära punkten $t = 0$ i sitt inre, så kommer de signaler $x_\varepsilon(t)$ som approximerar $\delta(t)$ och har tillräckligt kort varaktighet, att vara ≠ 0 bara i en del av detta intervall. Eftersom man då har att $\int_b^c x_\varepsilon(t)\,dt = 1$, så är också $\int_b^c \delta(t)\,dt = 1$.

Om å andra sidan punkten $t = 0$ ligger utanför intervallet, så är $x_\varepsilon(t) = 0$ i intervallet, dvs. $\int_b^c x_\varepsilon(t)\,dt = 0$, varför också $\int_b^c \delta(t)\,dt = 0$. På motsvarande sätt får man att

---

2 De kallas också *Diracpulser* (eller *Diracfunktioner*) efter den engelske fysikern och Nobelpristagaren *Paul Dirac* (1902 – 1984).

3 Vi kommer till vad dessa är nedan (§4.2.6).

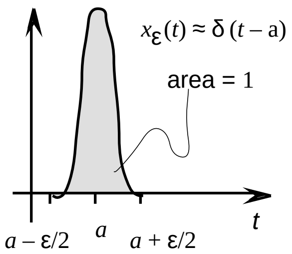
4 Resonemangen i det här avsnittet är heuristiska. (Heuristik = Metod att upptäcka eller bilda ny kunskap.) Några strikta bevis för sambanden i detta avsnitt kan inte ges här, eftersom vi inte har någon en formell definition av vad ”generaliserade funktioner” är för något att utgå ifrån.

$$\int_b^c \delta(t-a)\,dt = \begin{cases} 1, \text{ om } a \text{ är inre punkt i integrationsintervallet,} \\ 0, \text{ om } a \text{ är yttre punkt till integrationsintervallet.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Övning 4.2:

Beräkna integralerna över intervallet $0 \le t \le 3$ för funktionerna i uppgift 4.1.

4.2.2. Multiplikation med δ-pulser



Låt $x_\varepsilon(t)$ vara en funktion som approximerar $\delta(t-a)$ och som har en kort varaktighet ε, d.v.s.

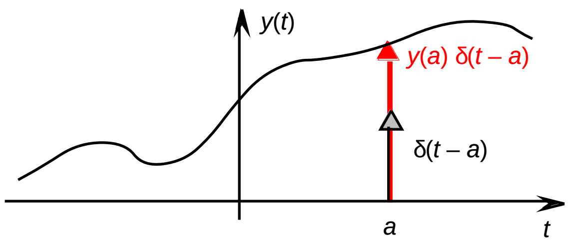
$$x_\varepsilon(t) = 0, \text{ då } |t-a| \ge \varepsilon/2 \text{ och}$$

$$\int_b^c x_\varepsilon(t)\,dt = 1 \text{ om } b \le a - \varepsilon/2,\ a + \varepsilon/2 \le c.$$

Om nu $y(t)$ är en funktion som är *kontinuerlig i* $x = a$, så är för små ε, $y(t) \approx y(a)$ då $|t-a| \le \varepsilon/2$. Detta innebär att $y(t)\cdot x_\varepsilon(t) \approx y(a)\cdot x_\varepsilon(t)$ för alla dessa t och approximationen kan förväntas bli bättre och bättre ju mindre ε är. Låter men $\varepsilon \to 0+$ får man

$$\boxed{y(t)\cdot\delta(t-a) = y(a)\cdot\delta(t-a)} \tag{4.3}$$

Uttrycket $y(a)\cdot\delta(t-a)$ kan uppfattas som en modell för en avläsning av y:s värde i $t = a$ – man *samplar* y vid ”tidpunkten” a.



Av (4.3) får man också att $\int_b^c y(t)\cdot\delta(t-a)\,dt =$

$$\int_b^c y(a)\cdot\delta(t-a)\,dt = y(a)\int_b^c \delta(t-a)\,dt \text{, dvs enligt (4.2):}$$

$$\int_b^c y(t)\cdot\delta(t-a)\,dt = \begin{cases} y(a), \text{ om } b < a < c \text{ och } y(t) \text{ är kontinuerlig i } t = a, \\ 0, \quad \text{ om } a \text{ ligger utanför intervallet } b \le t \le c. \end{cases} \tag{4.4}$$

Anmärkning: Förfarandet förutsätter att den funktion $y(t)$ som man multiplicerar med är kontinuerlig i δ-pulsens singularitet. Vi väljer att inte definiera multiplikation med andra funktioner y än dessa! Detta verkar kanske litet ofullständigt men är egentligen inget konstigt. Jämför med matrismultiplikationen som heller inte är definierad mellan godtyckliga matriser utan bara för sådana som har passande format. ♦

Övning 4.3

> Verifiera att för kontinuerliga funktioner $y(t)$ gäller $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y(a)\cdot\delta(t-a)\,\mathrm{d}a = y(t)$.
>
> (Relationen kan uttryckas: ”Varje (kontinuerlig) funktion är ’summan’ av sina samplingar”.)
>
> Och uttryckt med hjälp av faltning: $y(t) * \delta(t) = y(t)$

Den sista relationen i övningen ovan utsäger att δ-funktionen, när det gäller faltning, agerar analogt med talet 1 vid multiplikation – när man ”multiplicerar” (läs: faltar) med den så ”händer ingenting”. Definitionerna av de generaliserade funktionerna och av faltningen kan göras så att relationen

$$y(t) * \delta(t) = y(t)$$

gäller för alla generaliserade funktioner $y(t)$ (alltså även för dem som inte är kontinuerliga).

4.2.3 Linearitet vid integration

Integrationsreglerna för generaliserade funktioner är i mångt och mycket desamma som för de ”vanliga” envariabelfunktionerna. Man har exempelvis att

$$\boxed{\int_b^c (k\,x(t) + l\,y(t))\,\mathrm{d}t = k\int_b^c x(t)\,\mathrm{d}t + l\int_b^c y(t)\,\mathrm{d}t,} \tag{4.5}$$

där k och l är konstanter, också gäller för generaliserade funktioner $x(t)$ och $y(t)$.

Exempel 4.1:
Om $x(t) = \sin \pi t + 3\cos \pi t$ och $y(t) = \delta(t+1) - \delta(t)$, så är

$$\int_{-2}^{3} x(t)\cdot y(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{3}\Big((\sin \pi t + 3\cos \pi t)\delta(t+1) - (\sin \pi t + 3\cos \pi t)\delta(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \left[\text{Enligt (4.5)}\right]$$

$$= \int_{-2}^{3} (\sin \pi t + 3\cos \pi t)\delta(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_{-2}^{3} (\sin \pi t + 3\cos \pi t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = \left[\text{Enligt (4.4)}\right]$$

$$= \Big[(\sin \pi t + 3\cos \pi t)\Big]_{t=-1} - \Big[(\sin \pi t + 3\cos \pi t)\Big]_{t=0} = [0 + 3\cdot(-1)] - [0 + 3\cdot 1] = -6.$$

♦

Övning 4.4.

> Låt $y(t)$ vara den generaliserade funktionen i övning 4.1c. Beräkna $\displaystyle\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-t}\cdot y(t)\,\mathrm{d}t$.

Också substitutionsregeln för integration gäller oförändrad för linjära substitutioner ($t = a\tau + b$). Exempelvis har man för konstanter $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\,\phi(t)\mathrm{d}t = \left[at = \tau,\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau/a,\ t \to \pm\infty \quad \tau \to \pm\infty\right] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,\phi(\tau/a)\mathrm{d}\tau = \frac{\phi(0)}{a}.$$

4.2.4 δ-funktionen och LTI-system

Hos LTI-systemen spelar δ-funktionen också en viktig roll: Låt $h(t)$ vara utsignalen till ett LTI-system då δ-funktionen valts som insignal (h kan lämpligen kallas *pulssvaret*):

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\quad L \quad} \longrightarrow h(t).$$

Då kommer, på grund av tidsivariansen

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\quad L \quad} \longrightarrow h(t-\tau),$$

där τ är ett godtyckligt reellt tal. Multiplikation med $x(\tau)$ ger, på grund av linjariteten

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\quad L \quad} \longrightarrow x(\tau)h(t-\tau),$$

Integreras (”linjärkombineras”) detta med avseende på τ, så får man

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \longrightarrow \boxed{\quad L \quad} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = h(t) * x(t),$$

och vi får det som påstods i (1.22´) i det inledande avsnittet om LTI-system.

δ-funktionen kan också uppträda som pulssvarsfunktion till ett LTI-system:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad \delta(t) \quad} \longrightarrow y(t)$$

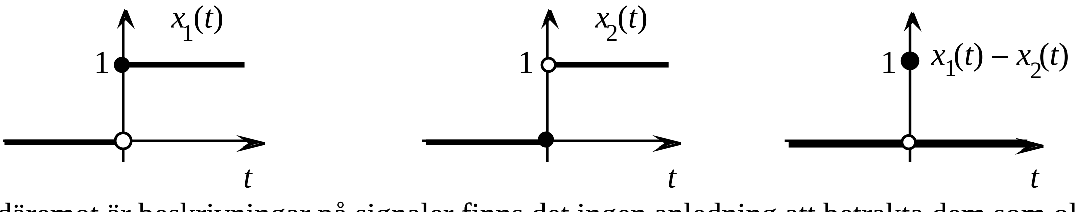
Här är $y(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$, dvs. systemet är det ”triviala” system där utsignalen är identisk med insignalen.

Övning 4.5

Vilken verkan på insignalen har ett LTI-system med pulssvarsfunktion
a. $2\delta(t)$? **b.** $\delta(t-a)$, a reell konstant?

4.2.5 Likhet mellan generaliserade funktioner. Skalning av δ-funktionen

Funktionerna $x_1(t) = \begin{cases} 1, \text{ om } t \geq 0, \\ 0, \text{ om } t < 0 \end{cases}$ och $x_2(t) = \begin{cases} 1, \text{ om } t > 0, \\ 0, \text{ om } t \leq 0 \end{cases}$ är inte identiska eftersom $x_1(0) \neq x_2(0)$.



Men om de däremot är beskrivningar på signaler finns det ingen anledning att betrakta dem som olika eftersom skillnaden inte går att detektera med några fysikaliska instrument. Man överenskommer bl.a. därför att betrakta två generaliserade funktioner (signaler) $x_1(t)$ och $x_2(t)$ som lika om

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x_1(t) - x_2(t))\phi(t)\,dt = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\phi(t)\,dt \right)$$

för godtyckliga (tillräckligt reguljära) funktioner $\phi(t)$.

Exempelvis har man enligt det föregående avsnittet att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\,\phi(t)\,dt = \frac{\phi(0)}{a} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{a}\,\phi(t)\,dt$$

för ”godtyckliga” funktioner $\phi(t)$. D.v.s.

$$\boxed{\delta(at) = \frac{1}{a}\,\delta(t), \text{ om } a > 0.} \qquad (4.6)$$

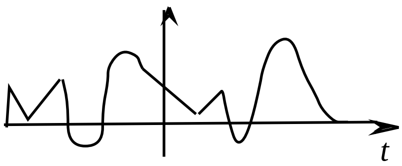
Övning 4.6: Vilken likhet får man i stället för (4.6) om $a < 0$?

4.2.6 Generaliserad derivering av kontinuerliga funktioner

Ett av de mest fundamentala sambanden mellan begreppen derivata och integral är som bekant:

$$\int_{b}^{t} x'(t)\,dt = x(t) - x(b). \qquad (4.7)$$

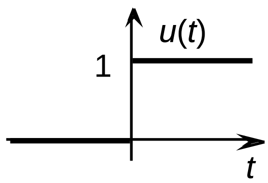
Enligt denna kan man exakt beräkna en funktions alla värden om man känner dess derivata och dess värde i en enda punkt. I bevisen för detta brukar man förutsätta att $x'(t)$ existerar i varenda punkt i intervallet, men relationen är faktiskt riktig också om $x(t)$ uppfyller det svagare villkoret att vara *kontinuerlig och sträckvis deriverbar* med eventuellt olika höger- och vänsterderivata i enstaka punkter.



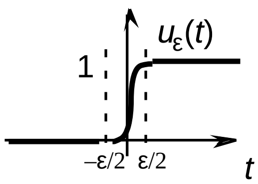
Att kontinuiteten är en väsentlig inskränkning syns bl.a. av följande:

Exempel 4.2:

Betrakta enhetssprånget [5] $u(t) = \begin{cases} 1, \text{ om } t > 0, \\ 0, \text{ om } t < 0. \end{cases}$



Dess derivata $u'(t)$ är uppenbarligen = 0, då $t \neq 0$ medan den enligt den klassiska analysens definitioner saknar derivata då $t = 0$. Här kan man inte med enbart kännedom om derivatan och att exempelvis $u(-1) = 0$, bestämma värdet av $u(1)$ – information om språngets storlek för $t = 0$ saknas!

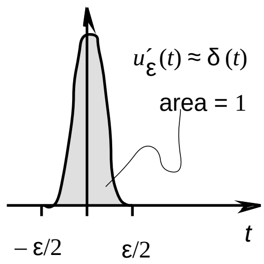


Approximeras $u(t)$ med deriverbara funktioner $u_\varepsilon(t)$ som i figuren till vänster, där man i det korta intervallet $-\varepsilon/2 \le t \le \varepsilon/2$ skarvat i den övriga delen av grafen för u med en slät växande kurva, så får man däremot en funktion för vilken huvudsatsen (4.7) tillämplig:

$$\int_{-1}^{t} u_\varepsilon'(t)\,dt = u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(-1) = u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, \text{ om } t > \varepsilon/2, \\ 0, \text{ om } t < -\varepsilon/2. \end{cases}$$

Oavsett hur $u_\varepsilon(t)$ har definierats i intervallet $-\varepsilon/2 \le t \le \varepsilon/2$, så kommer $u_\varepsilon'(t)$ att ha principutseendet

5 Se §2.9 i arbetsmaterial 2.



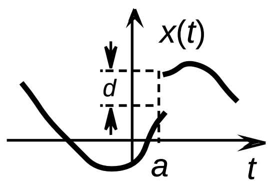
d.v.s. $u_\varepsilon'(t)$ approximerar $\delta(t)$ då $\varepsilon \to 0+$. Det är därför motiverat att uppfatta $\delta(t)$ som (den *generaliserade*) *derivatan* av stegfunktionen $u(t)$:

$$\boxed{u'(t) = \delta(t)} \tag{4.8}$$

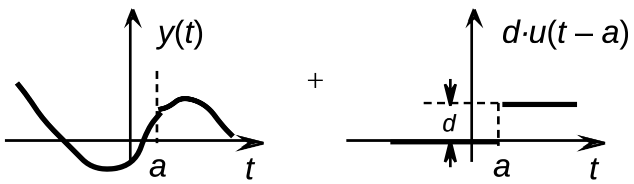
Med detta generaliserade derivatabegrepp kommer likheten (4.6) att vara giltig även för funktionen $u(t)$:

$$\int_{-1}^{t} u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{t} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \left.\begin{cases} 1, \text{ om } t > 0, \\ 0, \text{ om } t < 0. \end{cases}\right\} = u(t) - u(-1). \qquad \blacklozenge$$

På motsvarande sätt kan man generaliserat derivera funktioner vars grafer består av styckvis släta kurvor så när som på isolerade språng. En funktion med en graf som



kan nämligen uppfattas som summan av två funktioner:



där den ena, $y(t)$, är deriverbar utom möjligen för $t = a$ men i varje fall kontinuerlig också då $t = a$, och den andra $d{\cdot}u(t-a)$ är en multipel av en stegfunktion. Man sätter därför

$$x'(t) = y'(t) + d{\cdot}\delta(t-a).$$

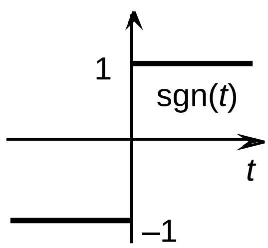
Mera allmänt om $x(t)$ är en sträckvis deriverbar funktion med språngdiskontinuiteter d_1, d_2, … i punkterna $a_1, a_2, \ldots$, så är

generaliserade derivatan av $x(t)$ = ”klassiska” derivatan av $x(t) + d_1\delta(t-a_1) + d_2\delta(t-a_2) + \ldots$

Exempel 4.3:

Signumfunktionen är liksom enhetssprånget en sträckvis konstant funktion. Den har ett språng av storleken +2 i origo. Alltså:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{sign}\,(t) = 2\delta(t).}$$



Samma resultat får man (förstås) om man deriverar relationen:

$$\mathrm{sign}\,(t) = 2\,\mathrm{u}(t) - 1$$

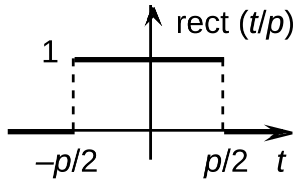
med hjälp av de vanliga deriveringsreglerna.

För den sträckvis konstanta funktionen

$$\mathrm{rect}(t/p) = \mathrm{u}(t + p/2) - \mathrm{u}(t - p/2)$$

gäller på motsvarande sätt

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{rect}(t/p) = \delta(t + p/2) - \delta(t - p/2).}$$

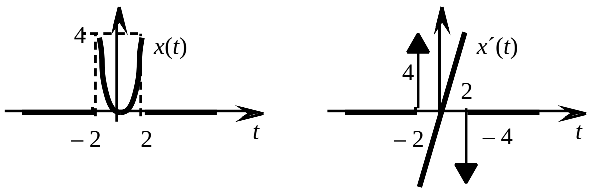


Exempel 4.4:

Problem: Beräkna den generaliserade derivatan till $x(t) = \begin{cases} t^2, \text{ om } |t| < 2, \\ 0, \text{ om } |t| > 2, \end{cases}$

Lösning: Funktionen $x(t)$ är deriverbar i klassisk mening då $t \neq \pm 2$, men har språngdiskontinuiteter i dessa punkter med språng +4 resp. –4. Den generaliserade derivatan ges därför av

$$x'(t) = \left\{ \begin{array}{l} 2t, \text{ om } |t| < 2, \\ 0, \text{ om } |t| > 2, \end{array} \right\} + 4\delta(t + 2) - 4\delta(t - 2).$$



♦

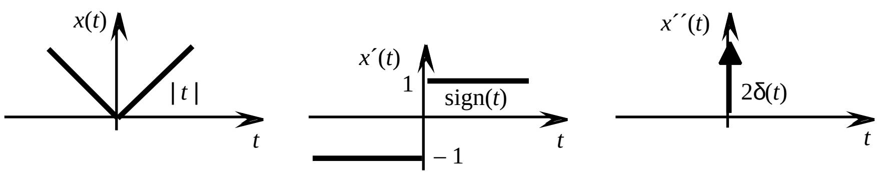
Om vi behöver skilja på den klassiska derivatan från den generaliserade skriver vi i fortsättningen $\{x'(t)\}$ eller $\left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right\}$ för den klassiska, medan samma symboler utan { }-tecknen får stå för den generaliserade.[6] Högre generaliserade derivator beräknas efter samma mönster.

Exempel 4.5:

Problem: Beräkna $x''(t)$ då $x(t) = |t|$.

Lösning: Man har $x'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{om } t > 0, \\ -1 & \text{om } t < 0. \end{array} \right\} = \mathrm{sign}\,(t)$, som är sträckvis konstant, med ett språng av storleken +2 för $t = 0$. Alltså är

$$x''(t) = \{x''(t)\} + 2\delta(t) = 2\delta(t).$$



♦

Övningar:

4.7 Beräkna för $x(t)$ som i exempel 4.4:

a. $\displaystyle\int_{-3}^{0} \{x'(t)\}\,\mathrm{d}t$, b. $\displaystyle\int_{-3}^{0} x'(t)\,\mathrm{d}t$.

---

6 Något allmänt vedertaget beteckningssätt för detta finns veterligen inte (ännu?) .

4.8 Beräkna den generaliserade derivatan till funktionerna

a. sign $(t)\cdot\cos t$,

b. sign $(t)\cdot\sin t$,

c. $\mathrm{rect}_{[a,\,b]}(t) = u(t-a)\cdot \mathrm{u}(b-t)$, $a < b$, där $u(t)$ = enhetssprånget. (Rita först grafen!)

d. $u(t)\cdot|t-1|$. (Rita först grafen!)

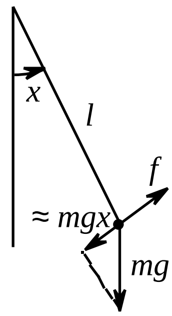
*e. $\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{(-1/t)}, & \text{då } t > 0 \\ 0, & \text{då } t < 0. \end{cases}$ (Rita först grafen!)

4.9 Beräkna $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big(\mathrm{u}(t)\cdot \mathrm{e}^t + u(-t)\cdot(1+t)\Big)$

4.10 Låt $x(t) = (u(t) - u(t-2\pi))\cdot \sin t$.

a. Verifiera att $x''(t) + x(t) = \delta(t) - \delta(t-2\pi)$.

b. Skissera graferna för $x(t)$, $x'(t)$ och $x''(t)$.



Accelerationen = lx''

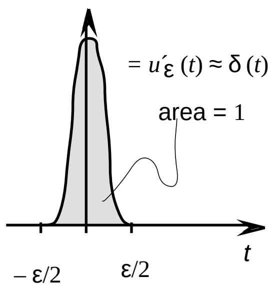
c. En pendlande punktmassa hänger i en viktlös tråd. För små utslagsvinklar $x(t)$ och försumbar friktion gäller då enligt Newtons kraftlagar att:

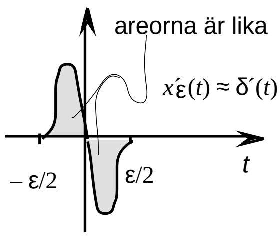
$$x''(t) + \frac{g}{l}\,x(t) = \frac{1}{m}\,f(t),$$

där g är tyngdaccelerationaen, l trådens längd och $f(t)$ en yttre kraft som påverkar pendeln. Vilken situation beskrivs av differentialekvationen i a-uppgiften?

Tolka lösningen $x(t) = (u(t) - u(t-2\pi))\cdot\sin t$ i ljuset av svaret på den frågan.

4.2.7 Derivering av δ-pulser





Tanken att generaliserade funktioner approximeras av deriverbara funktioner kan användas för att definiera derivering av generaliserade funktioner. Hur detta fungerar kan man ana av följande skissartade exempel:

Betrakta δ-funktionen. Den approximeras av deriverbara funktioner $x_\varepsilon(t)$ med grafer som i den vänstra figuren. Derivatan $\delta'(t)$ kommer då att approximeras av $x_\varepsilon'(t)$, som, om $x_\varepsilon(t)$:s maximum antas för $t = 0$, kommer att ha principutseendet som i den högra figuren. För intervall $b \le t \le c$ som har intervallet $-\varepsilon/2 \le t \le \varepsilon/2$ i sitt inre har man:

$$\int_b^c x_\varepsilon'(t)\,\mathrm{d}t = x_\varepsilon(c) - x_\varepsilon(b) = 0 \text{ och, mera allmänt för godtyckliga deriverbara funktioner } y(t):$$

$$\int_b^c y(t)\cdot x_\varepsilon'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\text{Partiell integration}\Big] = \Big[y(t)\cdot x_\varepsilon(t)\Big]_b^c - \int_b^c y'(t)\cdot x_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = 0 - \int_b^c y'(t)\cdot x_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

där den högra ledet $\to\ -\displaystyle\int_b^c y'(t)\cdot\delta(t)\,\mathrm{d}t = -y'(0)\int_b^c \delta(t)\,\mathrm{d}t$ om $\varepsilon \to 0+$. Det vänstra ledet kan uppfattas som en approximation till $\int_b^c y(t)\cdot \delta'(t)\,\mathrm{d}t$ och man leds till de relationer som beskriver δ′:s väsentligaste egenskaper:

$$\int_b^c y(t)\cdot \delta'(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} -y'(0), \text{ om } b < 0 < c \text{ och } y(t) \text{ har kontinuerlig derivata,} \\ 0, \text{ om 0 ligger utanför intervallet } b \le t \le c. \end{cases} \tag{4.9}$$

Allmännare kan man definiera derivatan för en godtycklig generaliserad funktion så att den vanliga räkneregeln för partiell integration gäller:

$$\int_b^c y(t)\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[y(t)\cdot x(t)\Big]_b^c - \int_b^c y'(t)\cdot x(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.10}$$

dock med inskränkningen att funktionerna x och y inte har någon gemensam singularitet och att ändpunkterna ≠ singulariteterna. Sambandet (4.9) är ett specialfall av (4.10):

$$\int_b^c y(t)\cdot \delta'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[y(t)\cdot\delta(t)\Big]_b^c - \int_b^c y'(t)\cdot\delta(t)\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix}\delta(b) = \delta(c) = 0 \text{ och} \\ y'(t)\cdot\delta(t) = y'(0)\cdot\delta(t)\end{bmatrix} = -\,y'(0)\int_b^c \delta(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9′}$$

Derivator av godtycklig ordning kan definieras efter samma mönster. Även dessa högre derivator är generaliserade funktioner för vilka räknereglerna ovan gäller. Man har t.ex. för δ-funktionens andraderivata och två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner y:

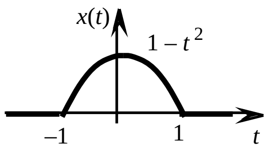
$$\int_b^c y(t)\cdot \delta''(t)\,\mathrm{d}t = \Big[y(t)\cdot\delta'(t)\Big]_b^c - \int_b^c y'(t)\cdot\delta'(t)\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix}\delta'(b) = \delta'(c) = 0 \\ \text{och } (9')\end{bmatrix} = (-1)^2\, y''(0)\int_b^c \delta(t)\,\mathrm{d}t.$$

På samma sätt får man det allmännare

$$\int_b^c y(t)\cdot \delta^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\, y^{(n)}(0)\int_b^c \delta(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.11}$$

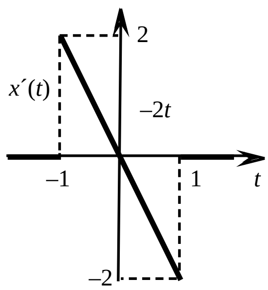
Exempel 4.6:

Problem: Låt $x(t) = 1 - t^2$, om $|t| \le 1$, $= 0$ för övriga t-värden. Beräkna x', x'' och x'''.



Lösning: $x(t)$ är kontinuerlig och saknar därför språngdiskontinuiteter, varav

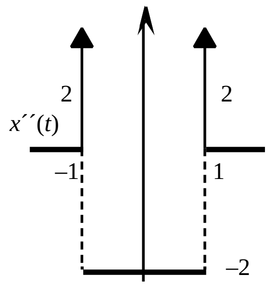
$$x'(t) = \{x'(t)\} = \begin{cases} 0, & \text{om } t < -1, \\ -2t, & \text{om } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{om } t > 1. \end{cases}$$



Denna funktion har språng av storleken +2 för $t = -1$ och $t = 1$, men är annars kontinuerlig.

Man får andraderivatan

$$x''(t) = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0, & \text{om } t < -1, \\ -2, & \text{om } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{om } t > 1. \end{Bmatrix}}_{=\{x''(t)\}} + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1).$$



Den första termen är en sträckvis konstant funktion med språng –2 för $t = -1$ och språng +2 för $t = 1$, för övriga t är den deriverbar med derivatan = 0. Alltså $\{x'''(t)\} = 0$ då $t \neq \pm 1$ och

$$x'''(t) = -2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 2\delta'(t+1) + 2\delta'(t-1).$$ ♦

Exempel 4.7:

Problem: Utnyttja resultatet i föregående exempel för att beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{i\omega t}\, dt$.

Lösning: Eftersom $x(t)$ och dess derivator är = 0 utanför intervallet $-1 \leq t \leq 1$ så ger partiell integration

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{i\omega t}\, dt = -\frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \left(-\frac{1}{i\omega}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x''(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \left(-\frac{1}{i\omega}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} x'''(t)\, e^{i\omega t}\, dt.$$

Resultatet från föregående exempel ger att detta är

$$= -\frac{i}{\omega^3}\Big(-2\,[e^{i\omega t}]_{t=-1} + 2\,[e^{i\omega t}]_{t=1} + 2[-i\omega\, e^{i\omega t}]_{t=-1} + 2[-i\omega\, e^{i\omega t}]_{t=1}\Big) =$$

$$= -\frac{2i}{\omega^3}\Big(-e^{-i\omega} + e^{i\omega} - i\omega(e^{-i\omega} + e^{i\omega})\Big) = \frac{4}{\omega^3}\,(\sin\omega - \omega\cos\omega),$$

där man använt att $e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i\sin\omega$ och $e^{i\omega} + e^{-i\omega} = 2\cos\omega$. ♦

Övningar:

4.11 Låt $x(t) = |t|$ om $|t| \le 1$ och $= 0$ för övriga t-värden.

a. Beräkna x' och x''.

b. Beräkna med hjälp av resultatet i a-uppgiften integralen $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{i\omega t}\, dt$.

4.12 Låt $x(t) = \sin t$ då $|t| \le \pi$ och $= 0$ för övriga t-värden.

a, Beräkna $x(t) + x''(t)$ på så enkel form som möjligt.

b. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + x''(t))\, e^{i\omega t}\, dt$.

4.13 Låt $x(t) = \cos t$ då $|t| \le \pi$ och $= 0$ för övriga t-värden.

a, Beräkna $x(t) + x''(t)$ på så enkel form som möjligt.

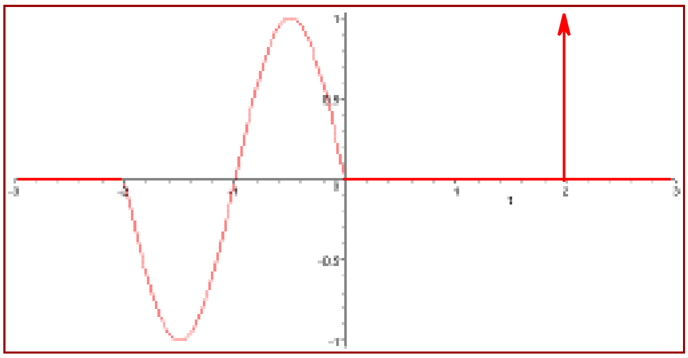
b. Beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + x''(t))\, e^{i\omega t}\, dt$.

4.14 Visa att $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta'(t - \tau)\, d\tau = x'(t)$ om x har en kontinuerlig 1:a-derivata och mera generellt

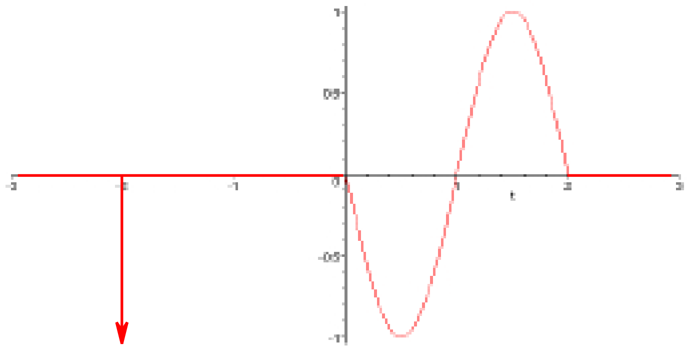
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta^{(n)}(t - \tau)\, d\tau = x^{(n)}(t)$ om x har en kontinuerlig n:te-derivata.

Svar:

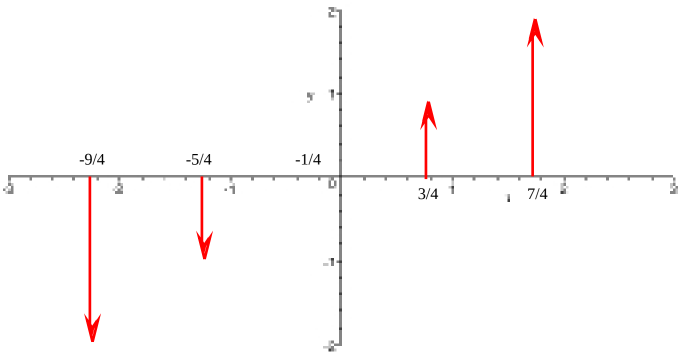
4.1a.



4.1b



4.1c



4.2a 1, **b** 0, **c** 3.

4.4 $-e^{5/4}$.

4.5a $y(t) = 2x(t)$ (dvs. förstärkning), **b** $y(t) = x(t-a)$ (dvs fördröjning a tidsenheter).

4.6. $\delta(at) = -\frac{1}{a}\ \delta(t)$ om $a < 0$. (Sammanfattningsvis: $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\ \delta(t)$ om $a \neq 0$.)

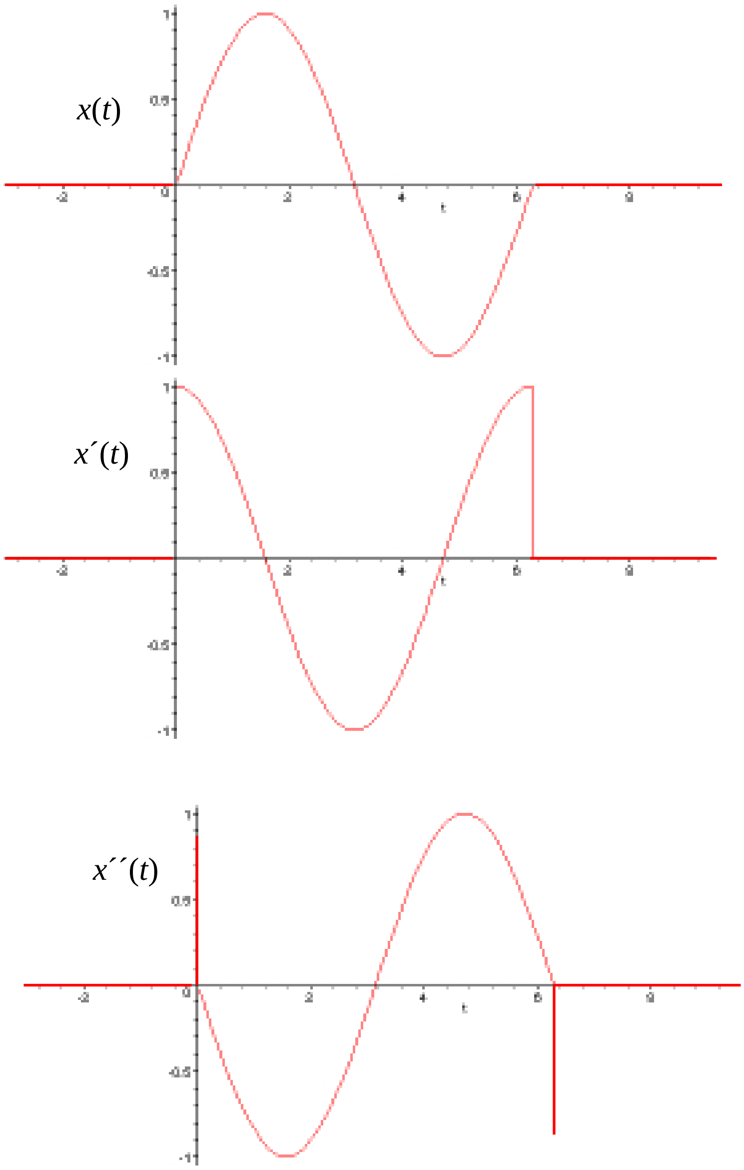
4.7a. –4, **b**. 0.

4.8a. $2\delta(t) - (\text{sign } t) \cdot \sin t$, **b**. $(\text{sign } t) \cdot \cos t$, **c**. $\delta(t-a) - \delta(t-b)$,

d {0, om $t < 0$, –1 om $0 < t < 1$, 1 om $t > 1$} + $\delta(t)$ **e**. $-\,u(t) \cdot \frac{1}{t^2}\ e^{-(1/t)} + \delta(t)$.

4.9. $\mathrm{u}(t) \cdot e^{t}$

4.10b.



4.10c. Pendeln befinner sig i vila då $t < 0$, får en ”enhetsknuff” åt höger vid $t = 0$, börjar svänga enligt $x(t) = \sin t$, får en ny enhetsknuff, den här gången är vänster, vid $t = 2\pi$. Denna stoppar rörelsen helt.

4.11a. $x´(t) = \{0 \text{ om } t < -1, -1 \text{ om } -1 < t < 0, 1 \text{ om } 0 < t < 1, 0 \text{ om } t > 1\} + \delta(t+1) - \delta(t-1)$,
$x´´(t) = \delta´(t+1) - \delta´(t-1) - \delta(t+1) + 2\delta(t) - \delta(t-1)$.

b. $\dfrac{2}{\omega^2}(\omega \sin \omega + \cos \omega - 1)$.

4.12a. $\delta(t-\pi) - \delta(t+\pi)$.

b.. $2i \sin(\pi\omega)$.

4.13a. $\delta´(t-\pi) - \delta´(t+\pi)$.

b.. $2\omega \sin(\pi\omega)$.