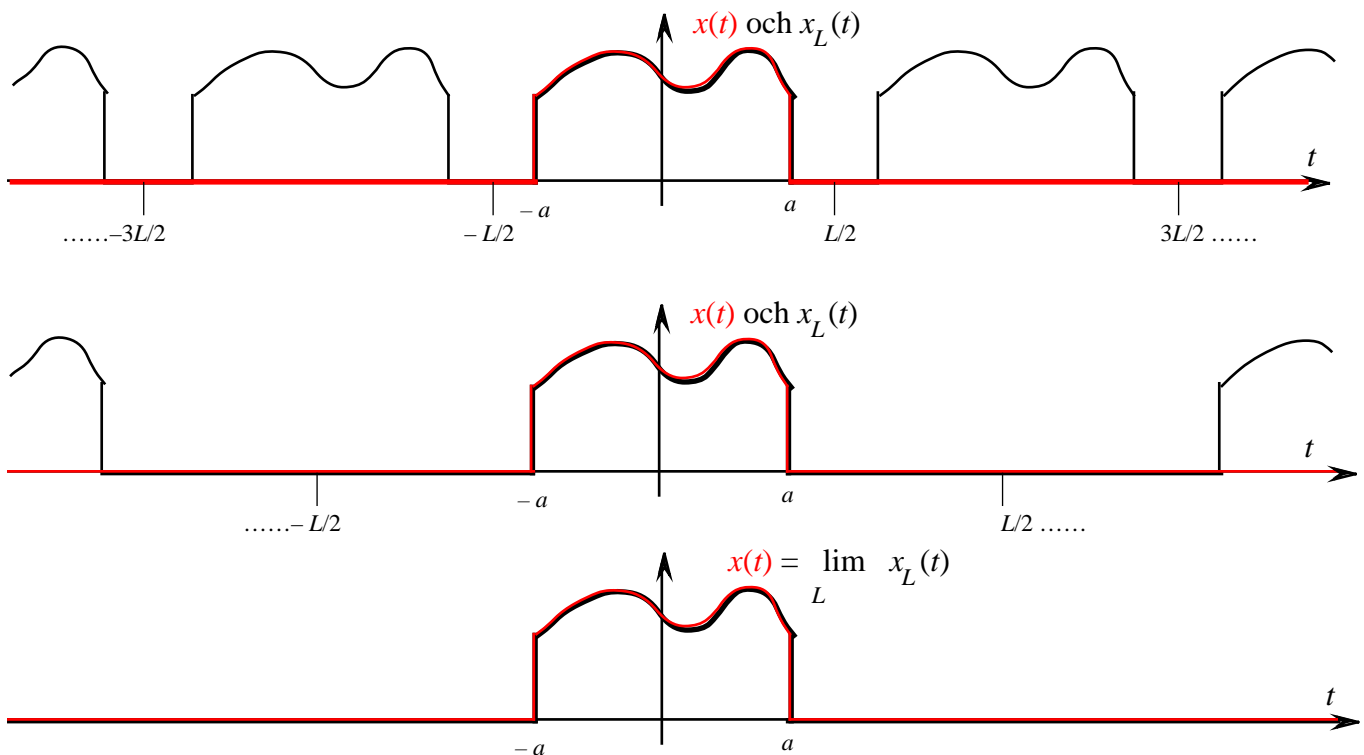


7. Fouriertransformen

7.1. Informella härledningar av syntes- och analyskvationerna för fouriertransformen

7.1.1 Approximation av "godtycklig" funktion med periodiska funktioner

Fourierseriers summa är alltid en periodisk funktion, och i stort sett varje periodisk funktion kan skrivas som (= representeras av) en fourierseriesumma. Det ligger nära till hands att söka efter liknande representationer för godtyckliga icke-periodiska funktioner genom att uppfatta dem som gränsvärdet för följderna av periodiska funktioner med succesivt växande periodlängd. Figurerna nedan illustrerar den idén:



Funktionen $x(t)$ är $= 0$ utanför intervallet $-a < t < a$, men för övrigt godtycklig. För $x_L(t)$, den L -periodiska fortsättningen av $x(t)$, gäller då att

$$\lim_L x_L(t) = x(t).$$

Fourierkoefficienterna till fourierserietvecklingen av $x_L(t)$ ges av

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t) e^{-in\pi t/L} dt = \text{Om } L > 2a = \frac{1}{L} \int_{-a}^a x(t) e^{-in\pi t/L} dt$$

och enligt syntesekvationen har man att

$$x_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-a}^a x(\tau) e^{-in\pi \tau/L} d\tau \cdot e^{in\pi t/L}$$

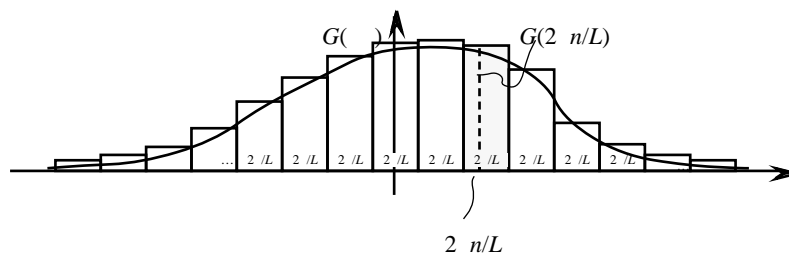
Om vi i uttrycket $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i 2\pi n t/L} \cdot e^{i 2\pi n t/L}$ sätter $2\pi n/L = \omega$, så förenklas det till

$$x(t) = \sum_{\omega} e^{-i \omega t} \cdot e^{i \omega t} = G(\omega).$$

Man får då att

$$x_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} G\left(\frac{2\pi n}{L}\right) e^{i 2\pi n t/L}. \quad (7.1)$$

Den summa som vi har här är nära släkt med Riemannsummorna som används vid definitionen av enkelintegral:



En heuristisk tolkning av gränsövergången $L \rightarrow \infty$ är att varje term i summan (7.1) så när som på en faktor $\frac{1}{2}$ svarar mot "arean" av en "rektangel" med "sidorna" $\frac{2}{L}$ och $G\left(\frac{2\pi n}{L}\right)$. Den rektangelarean approximerar arean av motsvarande område mellan G 's graf och ω -axeln. Med ökande L blir rektanglarna smalare och smalare och approximationerna successivt bättre och då $L \rightarrow \infty$ kommer

summan att $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$.

Sätter man

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i \omega t} dt, \quad (7.2)$$

så är $G(\omega) = X(\omega) \cdot e^{i \omega t}$ och man får

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i \omega t} d\omega, \quad (7.3)$$

Och vi får det i inledningen nämnda formelparet (1.5) och (1.6).¹

Syntesekvationen (7.3) kan alltså sägas uttrycka en "godtycklig" funktion som en linjär kombination (låt vara en oändlig sådan) av harmoniska svängningar $e^{i \omega t}$. Sett på det sättet anger analys- och syntesekvationerna (7.2) den "vikt", $X(\omega)$, som vinkelfrekvensen ω har i denna linjära kombination.

Anmärkning: (Ett mellanspel om variabelval och beteckningar)

Analys- och syntesekvationerna för fouriertransformen blir litet "snyggare" om man använder sig av variabeln $f = \frac{\omega}{2\pi}$ i stället för ω , man får då:

¹ Resonemanget ovan motsvaras i ZC av sidan 595, § 14.3

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (7.2')$$

och, med tanke på att $d = 2\pi f$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df. \quad (7.3')$$

Kursboken i Ljud- och vibrationslära, i uppslagsverket och även ZC använder ω -variabeln², men f -variabeln förekommer inte så sällan i annan litteratur. Beteckningarna för de olika transformerna är tråkigt nog inte standardiserade. Här har vi liksom tabellverket valt att motsvarande stora bokstaver får beteckna fouriertransformen till den "tidsberoende" funktionen, som alltid betecknas med en liten bokstav ($X(\omega)$ är transform av $x(t)$). I kursboken för Ljud&vib används fettskriven bokstav för transformen ($\mathbf{F}(\omega)$ är transformen av $F(t)$).

Andra varianter för beteckning av fouriertransformen som också förekommer i litteraturen är

$$F(x) \text{ eller } FT(x)$$

$$\hat{x}(\omega) \text{ eller } \hat{x}(f).$$

I dessa varianter framhävs via "operatorerna" F , FT respektive $\hat{}$ att fouriertransformen "förvandlar" funktioner ("signaler") till andra funktioner ("signalens spektrum"). Vill man ytterligare poängtera den egenskapen kan man skriva t.ex

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(f)$$

för analyskvationen och

$$X(f) \xrightarrow{FT^{-1}} x(t)$$

för syntesekvationen.

Samma synsätt och liknande beteckningar har man ibland för fourierserierna. Analysekvationen

$$c_n = \int_{-1/L}^{1/L} x(t) e^{-j2\pi n t/L} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

"förvandlar" signalen $x(t)$ till en talföljd c_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Om den operationen betecknas FS kan man skriva

$$x(t) \xrightarrow{FS} c_n$$

och för syntesekvationen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n t/L},$$

$$c_n \xrightarrow{FS^{-1}} x(t).$$

Man kan resonera sig fram till formelparet (7.2) och (7.3) på mångahanda vis. Ett mera direkt förfarande som inte går omvägen över fourierserierna skissas i nästa avsnitt. Den innehåller också en omskrivning av δ -funktionen som är intressant i sig.

² Men i ZC definieras fouriertransformen beklagligtvis som $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{+j\omega t} dt$, med +tecken i integrandens exponent (sid 601). Detta gör att $X_{Zill-Cullen}(\omega) = X_{\text{vår variant}}(-\omega)$!

7.1.2 Härledning med hjälp av $e^{i\omega t}$ -funktionen

- $e^{i\omega t}$ -funktionen som summa av harmoniska vågor

En kontinuerlig motsvarighet till summan $\sum_{k=-M}^M e^{i k \omega t}$ ges av integralen

$$d_{2M} = \int_{-M}^M e^{i \omega t} dt,$$

där man så att säga summerar harmoniska svängningar för *alla* frekvenser i ett visst intervall.

För summan $\sum_{n=-M}^M e^{i n \omega t}$ härleddes i avsnitt 5.2.2 att man efter gränsovergång $M \rightarrow \infty$ får likheten:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i n \omega t} = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n), \quad (7.4)$$

(som är en likhet mellan generaliserade funktioner).

Litet snyggare blir den formeln om man väljer "varvfrekvensen" $f = \omega / 2\pi$ som variabel. Man får då³

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n), \quad (7.4')$$

Vi skall se att man har en motsvarande relation för integralfallet,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i \omega t} dt = 2\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n) \quad (7.5)$$

och med varvfrekvensen som variabel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n). \quad (7.5')$$

Integralen d_{2M} kan beräknas med standardmetoder:

För $\omega \neq 0$ är

$$d_{2M} = \int_{-M}^M \frac{e^{i \omega t}}{i} dt = \frac{e^{i \omega M} - e^{-i \omega M}}{i \omega} = \frac{e^{i \omega M} - e^{-i \omega M}}{2i \omega} = \frac{\sin \omega M}{\omega} = \frac{\sin M}{M}$$

och för $\omega = 0$ får man den konstanta integranden 1, varför värdet blir integrationsintervallets längd $2M$.

Sätter vi denna till P ,⁴ så får vi

$$d_P(\omega) = \frac{\sin P \omega / 2}{\omega}, \text{ då } \omega \neq 0 \text{ och } \omega = P, \text{ då } d_P = 0.$$

³ Obs sambandet $\delta(\omega/a) = a \delta(\omega)$ om $a > 0$ (sambandet (4.6).)

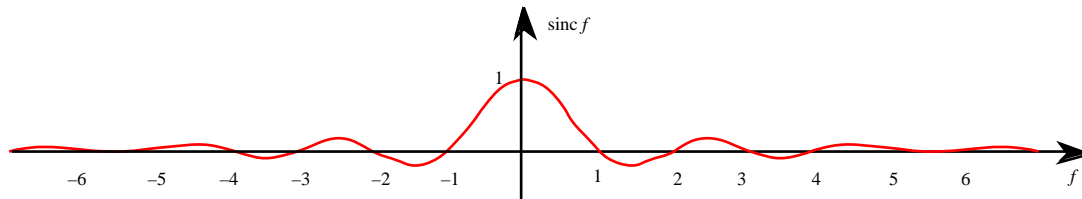
⁴ Observera analogin med summafallet, där P betecknade antalet termer i summan.

Man kan få visst grepp om hur denna funktion beror av sina två variabler P och f genom att göra följande observationer:

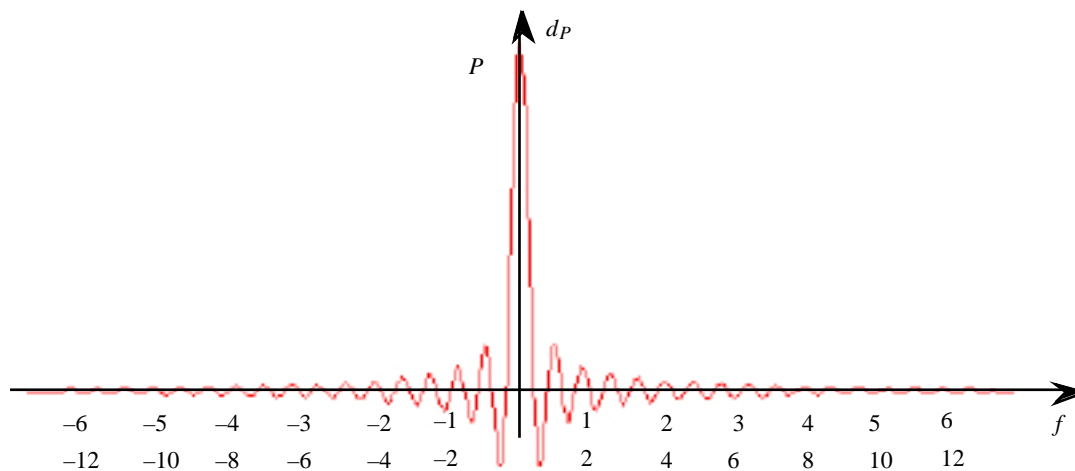
- Uttryckt i varvfrekvensen $f = \omega/2\pi$ och för $P = 1$, får vi funktionen $\frac{\sin f}{f}$ (då $f \neq 0$) och 1 (då $f = 0$). Den har sina nollställen i heltalspunkterna $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ och växlar tecken i alla dessa och är 0 då $f = 0$. Funktionen har fått ett särskilt namn – *sinus cardinalis*, förkortat *sinc*:

$$\text{sinc } f = \frac{\sin f}{f}, \text{ då } f \neq 0 \text{ och } = 1, \text{ då } f = 0. \quad (7.6)$$

Dess graf representerar ett slags dämpad svängning:



- För allmänare P får man, eftersom $d_P(\omega) = d_P(2\pi f) = \frac{\sin P f}{f} = P \frac{\sin P f}{P f} = P \text{ sinc } P f$, att dess graf erhålls ur grafen för $\text{sinc } f$ genom en ”areabevarande” deformation av den typ som beskrevs i avsnitt 2.8 – en hoptryckning i skalan P i horisontell led och en töjning i skalan P i vertikal led. Här kommer en skiss av grafen, där båda frekvensskalorna f och ω är markerade.



Grafen har för stora P en markant topp i origo och svänger med dämpning. Dess nollställen ligger i punkterna $f = \pm 1/P, \pm 2/P, \pm 3/P, \dots$ (resp. $\omega = \pm 2\pi/P, \pm 4\pi/P, \pm 6\pi/P, \dots$), d.v.s. allt tätare med växande P .

- Den ”areabevarande” skalningen innebär att

$$d_P(\omega) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d_P(2\pi f) df = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } f df.$$

Värdet av dessa integraler är alltså oberoende av P , d.v.s. en konstant.

Med metoder som går en bra bit utöver de integrationsförfaranden som beskrivs i grundkurserna kan

man visa att integralen i det ledet längst till höger = 1. ⁵ Vidare gäller att $\int_a^b p(\omega) d\omega = 0$, då P

för alla intervall $a < b$ som *inte* innehåller talet 0.

Man kan därför säga att $\int_a^b p(\omega) d\omega$ för stora P tycks approximera δ -pulsens $2 \cdot \text{sinc}(\omega)$. Man kan strikt visa att det faktiskt är så. Man har det *exakta* sambandet:

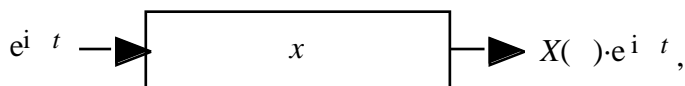
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt = 2 \cdot \text{sinc}(\omega) \quad (7.5)$$

eller, med $\omega = 2\pi f$ och med tanke på att $2 \cdot \text{sinc}(2\pi f) = \text{sinc}(\pi f)$,

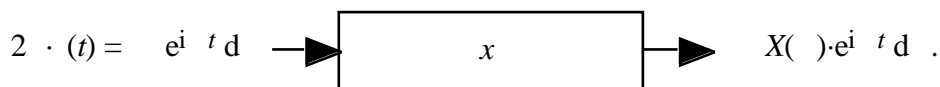
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} dt = \text{sinc}(\pi f). \quad (7.5')$$

• *Alternativ härledning av analys- och syntesekvationerna för fouriertransformen*

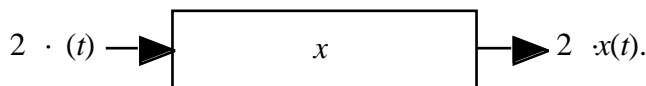
Vi vet enligt (1.21) att exponentialfunktionerna $e^{i\omega t}$ är egenfunktioner till LTI-systemen, om vi döper pulssvaret till $x(t)$,



där $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$. Integreras detta med avseende på t , så får man



Men eftersom insignalen här är en uppskalad δ -puls, så är utsignalen ett på motsvarande sätt uppskalat pulssvar:



⁵ De primitiva funktionerna till sinc-funktionen kan tyvärr inte uttryckas med hjälp av de elementära funktionerna, så

integrationssambandet $\int_a^b x'(\omega) d\omega = x(b) - x(a)$ är dessvärre inte till någon nytta här!

I båda fallen är det fråga om samma utsignal, varför $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$ och slutsatsen blir:

$$\text{Om } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \text{ så måste } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

7.2 Mer om faltning och fouriertransform

Med *faltningen*, $x*y$, av två funktioner $x(t)$ och $y(t)$ menas alltså funktionen

$$(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau.$$

Man betraktar gärna faltning som ett slags multiplikationsliknande räknesätt. Vi räknar upp några av de viktigaste egenskaperna hos faltningen. Man känner igen många som analoga med den "vanliga" multiplikationen,

- *Faltning är ett kommutativt räknesätt.*
Genom att i integralen substituera $t - \tau$ mot τ (genomför detta) och sedan byta plats på faktorerna i integranden får man

$$x*y = y*x. \tag{7.7}$$

- δ -funktionen spelar rollen av en enhet – om man "multiplicerar", d.v.s faltar, med den så "händer ingenting":

$$(x*\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = x(t), \text{ eller}$$

$$x*\delta = \delta*x = x. \tag{7.8}$$

- *Faltning är linjär i varje "faktor",* den så kallade *distributiva lagen* gäller:

För godtyckliga $x(t)$, $y_1(t)$ och $y_2(t)$ samt konstanter a_1 och a_2 gäller

$$x*(a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1(x*y_1) + a_2(x*y_2). \tag{7.9}$$

Båda leden kan nämligen skrivas

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) (a_1 y_1(t-\tau) + a_2 y_2(t-\tau)) d\tau.$$

Detta kan utan vidare utsträckas till summor med ett godtyckligt ändligt antal termer:

$$x*\sum_{n=0}^N a_n y_n = \sum_{n=0}^N a_n (x*y_n). \tag{7.9'}$$

och, med lämpliga krav på konvergensförloppet⁶, så gäller motsvarande också för oändliga serier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n * \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x * y)_n. \quad (7.9'')$$

Om funktionen y förutom av t beror av en ytterligare parameter, nedan kallad f , så gäller i samma anda att

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) * \int_{-\infty}^{\infty} y(t, f) df = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * y(t, f) df. \quad (7.9''')$$

Båda leden kan nämligen skrivas som dubbelintegralen

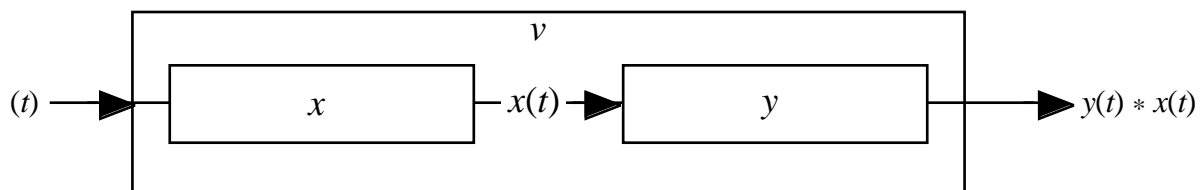
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t - \tau, f) d\tau df.$$

\mathbf{R}^2

- *Sammansättning av LTI-system och faltningar*

Om två LTI-system sätts efter varandra (seriekopplas), så kommer det sammansatta systemet också att vara av LTI-typ. Man kan fråga sig vilket det sammansatta systemets pulssvar då kommer att vara uttryckt i delsystemens pulssvar. Vi reder ut detta:

Låt delsystemens pulssvar vara $x(t)$ och $y(t)$ och det sammansatta vara $v(t)$. Skicka in signalen (t) i det sammansatta systemet. Utsignal från detta är då $v(t)$. Följande diagram visar vad som händer ”på vägen” i delsystemen:

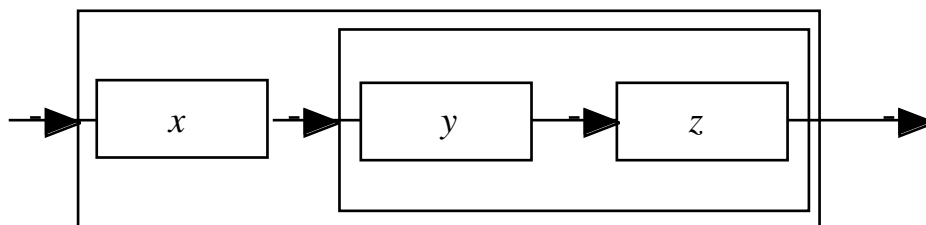


Sammansättningens pulssvar måste alltså vara faltningen av delsystemens pulssvar

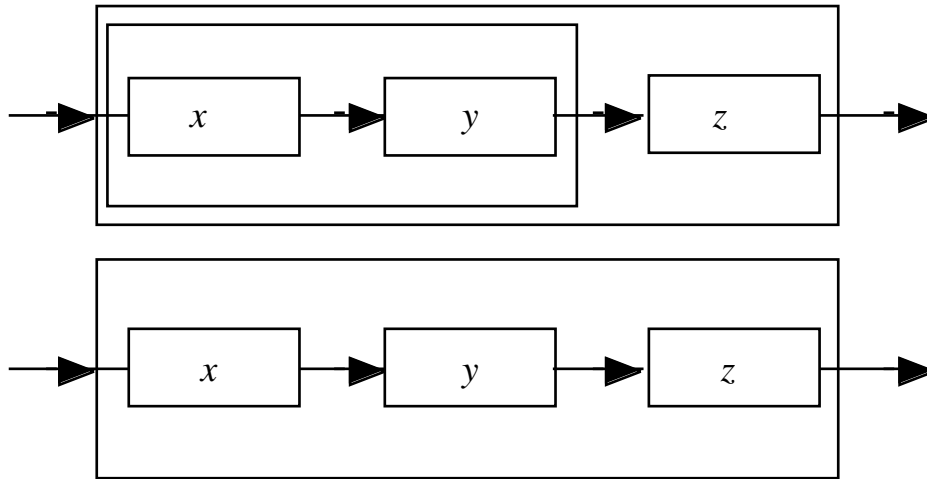
$$v(t) = y(t) * x(t) = x(t) * y(t)$$

- *Faltning är ett associativt räknesätt*

Sätter man tre LTI-system med pulssvar x , y och z efter varandra, så spelar det ingen roll i vilken ordning uppbyggnaden sker: Systemen



⁶ Preciseras inte här. För alla signalteoretiskt ”rimliga” situationer är sådana krav uppfyllda.



är identiska. Enligt föregående punkt så har man därför

$$(x*y)*z = x*(y*z).$$

(7.10)

Övningar: (Nedan betecknar $u(t)$ "the unit step function", dvs. $u(t) = 1$ om $t > 0$ och $= 0$ om $t < 0$.)

7.1 Beräkna

- | | | | |
|---|--|------------------------------------|----------------------|
| a. $e^{- t } * 1$, | b. $e^t * u(t)$, | c. $e^{-t} * u(-t)$, | d. $e^{- t } * t$, |
| e. $\text{rect}(t) * 1$, | f. $\text{rect}(t) * t$, | g. $\text{rect}(t) * t^2$, | |
| h. $\text{rect}(t) * u(t)$, (rita figur!), | i. $\text{rect}(t) * \text{rect}(t)$, (rita figur!) | | |
| j. $u(t) * u(t)$, (rita figur!), | k. $e^{-t} * \text{rect}(t)$, | l. $\{e^t \cdot u(t)\} * e^{2t}$, | |
| m. $e^{- t } * e^{it}$ | n. $e^{- t } * \cos t$, | o. $e^{- t } * \sin t$, | p. $(t-1) * (t-1)$. |

7.2 Verifiera följande allmänna relationer (a och b är en godtyckliga reella konstanter):

- $(t-a) * y(t) = y(t-a)$,
och om $x(t) * y(t) = z(t)$
- $x(t-a) * y(t) = x(t) * y(t-a) = z(t-a)$,
- $x(t-a) * y(t-b) = z(t-a-b)$,
- $x(-t) * y(-t) = z(-t)$.

7.3 Funktionen $x(t)$ är sådan att $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$ är konvergent. Verifiera följande allmänna relationer.

- $x(t) * 1 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$,
- $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt$,

och för de fall då $x(t)$ dessutom är en jämn reellvärd funktion:

- $x(t) * \cos(\omega t) = X(\omega) \cdot \cos(\omega t)$,
 - $x(t) * \sin(\omega t) = X(\omega) \cdot \sin(\omega t)$,
- (Ledning: Obs att $x(t)$ är jämn och reellvärd (om och) endast om $X(\omega)$ också är (jämn och) reellvärd.)

7.4 Vilka är relationerna motsvarande dem i 7.3c och d om $x(t)$ istället är en udda, reellvärd funktion?

7.3 Transformens egenskaper

De allmänna egenskaperna hos den tidskontinuerliga transformen är av samma slag som för fourierse-rierna (FS). Exempelvis är fouriertransformen också linjär:

$$ax(t) + by(t) \xrightarrow{FT} aX(\omega) + bY(\omega) \quad (a \text{ och } b \text{ konstanter})$$

Behöver man transformera (eller återtransformera) en linjär kombination av termer så räcker det alltså att man transformerar varje term för sig varefter man linjärkombinerar resultaten.

Fouriertransformens viktigaste egenskaper finns listade exempelvis i 7.1. Härledningarna är i de flesta fall rättfram. Exempelvis inses att

$$\text{om } x(t) \text{ är en } \begin{matrix} \text{jämn} \\ \text{udda} \end{matrix} \text{ funktion, så är också } X(\omega) \text{ en } \begin{matrix} \text{jämn} \\ \text{udda} \end{matrix} \text{ funktion,}$$

genom att enligt (7.2)

$$\begin{aligned} X(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j\omega(-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(\omega), \text{ dvs } X \text{ är jämn.} \end{aligned}$$

(a) Dualitet

Sambanden (7.2) och (7.3) är anmärkningsvärt symmetriska till sin konstruktion, man säger att de är *duala*: Särskilt tydligt blir detta om vi använder varvfrekvensen f som variabel. Analyssambandet (7.3) tillämpat på funktionen $X(2\pi t)$ – alltså fouriertransformen av x med f -variabeln bytt mot t – ger att dess fouriertransform är

$$X(2\pi t) e^{-j2\pi ft} dt = X(2\pi t) e^{j2\pi(-f)t} dt = x(-f),$$

Om man istället byter f -variabeln mot t så har man förstås en liknande relation, men faktorn 2 dyker då upp på annat sätt. Analyssambandet (7.3) ger:

$$X(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(t) e^{j2\pi(-t)f} dt = 2 \cdot x(-f)$$

Det är naturligt att upprätta tabeller över funktioner och deras transform. Se t.ex. i

Dualitetsegenskapen ovan kan i sådana tabell skrivas:

	Funktion	Transform, f -var.	Transform, t -var.
Om	$x(t)$	$X(f)$	$X(t)$
så gäller	$X(t)$	$2 \cdot x(-f)$	$x(-t)$

Exempel 7.1:

a. Man vill bestämma fouriertransformen till funktionen $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Direkt beräkning via analyskvationen ter sig svår eftersom integranden $\frac{e^{-j\omega t}}{1+t^2}$ saknar elementär primitiv funktion, så rutinmetoderna för integrallösning går inte att använda.

I en tabell över fouriertransformer (ω -varianten) hittar man dock att

$$e^{-a|t|} \quad FT \quad \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (\text{om } a > 0).$$

Dualitetsprincipen ger då (välj $a = 1$ och låt $\frac{1}{1+t^2}$ spela rollen av $Z(\omega)$) att

$$\frac{1}{1+t^2} \quad FT \quad \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{-|\omega|} = e^{-|\omega|}.$$

b. I en tabell av f -typ hade man istället hittat att

$$e^{-a|f|} \quad FT \quad \frac{2a}{a^2 + 4f^2} \quad (\text{om } a > 0).$$

Dualitetsprincipen ger då att

$$\frac{2a}{a^2 + 4t^2} \quad FT \quad e^{-a|f|} = e^{-a|f|}.$$

Speciellt om $a = 2$,

$$\frac{2a}{a^2 + 4t^2} \quad FT \quad e^{-a|f|}.$$

$$\frac{1}{1+t^2} \quad FT \quad e^{-2|f|},$$

d.v.s. den sökta transformen är $e^{-2|f|}$.

(b) δ -pulser konstanter

Om $x(t) = \delta(t)$ så är $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^0 = 1$. Dualiteten (obs $\delta(t)$ är en jämn funktion) ger

omedelbart att om $x(t) = 1$ så är $X(\omega) = 2\pi \delta(\omega)$. Väljer man "varvfrekvensen" f som variabel på transformersidan, så får man den litet snyggare transformen $e^{-2\pi|f|}$. I tabellform:

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
1.	$\delta(t)$	1	1
2.	1	$2\pi \delta(\omega)$	$e^{-2\pi f }$

(c) Förskjutning multiplikation med harmonisk svängning

Ett par duala allmänna egenskaper är

	Funktion	Transform (ω)	Transform (f)
	$x(t)$	$X(\omega)$	$X(f)$
1.	$e^{i\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$	
2.	$e^{iat} x(t)$		$X(f - a)$
3.	$x(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} X(\omega)$	$e^{-2\pi i f t_0} X(f)$

Man har nämligen för fouriertransformen av $e^{i\omega_0 t} x(t)$:

$$e^{i\omega_0 t} x(t) e^{-i\omega_0 t} \text{ d} = x(t) e^{-i(\omega - \omega_0) t} \text{ d} = X(\omega - \omega_0),$$

vilket är påståendet 1 i tabellen. Påståendet 3 är det duala till 1 (och 2).

Kombineras detta med resultatet i (b) får man

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
4.	$(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$	$e^{-2i\omega t_0}$
5.	$e^{i\omega_0 t}$	$2\delta(\omega - \omega_0)$	
6.	$e^{2i\omega_0 t}$		$(f - f_0)$

Speciellt så gäller för de trigonometriska funktionerna

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
7.	$(t + t_0) + (t - t_0)$	$e^{i\omega t_0} + e^{-i\omega t_0} = 2 \cos(\omega t_0)$	$e^{2i\omega_0 f} + e^{-2i\omega_0 f} = 2 \cos(2\omega_0 f)$
8.	$\cos(\omega_0 t)$	$(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$	
9.	$\cos(2\omega_0 t)$		$(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))/2$

och

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
10.	$(t + t_0) - (t - t_0)$	$e^{i\omega t_0} - e^{-i\omega t_0} = 2i \sin(\omega t_0)$	$e^{2i\omega_0 f} - e^{-2i\omega_0 f} = 2i \sin(2\omega_0 f)$
11.	$\sin(\omega_0 t)$	$-i(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$	
12.	$\sin(2\omega_0 t)$		$-i(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))/2$

(d) Skalning med faktor a skalning med faktor 1/a.
Tidsrevertering frekvensrevertering

En annan självdual egenskap handlar om vad som sker med skalning av variablerna: Om tidsvariabeln t skalas om till at ($a > 0$), så skalas både transformvärde och frekvensvariabel om med faktorn $1/a$. Om tidsskalan kastas om (tidsrevertering) så kastas även frekvensskalan om:

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
	$x(t)$	$X(\omega)$	$X(f)$
1.	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$
2.	$\frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right), a > 0$	$X(a\omega)$	$X(af)$
3.	$x(-t)$	$X(-\omega)$	$X(-f)$

Exempelvis gäller för fouriertransformen av $x(at)$;

$$x(at) e^{-i\omega t} \text{ d} = \text{Subst } a = \frac{1}{a}, \text{ d} = \text{d} / a \quad \frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right) e^{-i\omega t / a} \text{ d} = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

(e) Pulståg Pulståg

Funktionerna $(t - n)$ har enligt ovan transformerna $e^{-2\pi jfn}$. Summerar man dessa, så får man att

$(t - n)$ har transformen

$$e^{-2\pi jfn} = e^{2\pi jfn} \quad \text{Enligt sambandet (12) sid 21 i Arb.matr 3} = (f - n)$$

Funktionen $(t - n)$ är alltså sin egen fouriertransform (f -varianten)! Om istället väljs som

frekvensvariabel så får man transformen $(f/2 - n) = 2(f - 2n)$

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1.	$(t - n)$	$2(f - 2n)$	$(f - n)$

Sampling vid tidpunkterna $t = nT$ svarar mot multiplikation med den generaliserade funktionen

$$(t - nT) = (T(t/T - n)) = (at) = (t)/a = \frac{1}{T} (t/T - n).$$

Transformen för denna funktion är enligt skalningsegenskapen ($a = 1/T$):

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
2.	$(t/T - n)$	$2(f - n/T)$	$(f - n/T)$
3.	$(t - nT)$	$2(Tf - 2n) =$ $2/T (f - 2n/T)$	$(Tf - n) =$ $1/T (f - n/T)$

(f) rect sinc

$$P/2$$

Integralen $d_p(\) = \int_{-P/2}^{P/2} e^{i\omega t} dt$, som beräknades avsnitt 7.1.2, är också en fouriertransform⁷, nämligen

den av en funktion som är = 1 i intervallet $-P/2 < t < P/2$ och = 0 f.ö., d.v.s. av funktionen $\text{rect}(t/P)$. Enligt beräkningarna avsnitt 7.1.2 så har man:

⁷ Obs att $d_p(\)$ är en jämn funktion.

		Funktion	Transform ()	Transform (f)
	1.	$\text{rect}(t/P)$	$P \text{sinc}(P \cdot / (2 \cdot))$	$P \text{sinc}(Pf)$
Speciellt	2.	$\text{rect}(t)$		$\text{sinc}(f)$
	3.	$\text{rect}(t/(2 \cdot))$	$2 \text{sinc}(\cdot)$	
Dualt	4.	$\text{sinc}(Pt)$	$\frac{1}{P} \text{rect}(\cdot / (2 \cdot P))$	$\frac{1}{P} \text{rect}(f/P)$
och	5.	$\text{sinc}(t/(2 \cdot))$	$2 \text{rect}(\cdot)$	$2 \text{rect}(2 \cdot f)$
	6.	$\text{sinc}(t)$	$\text{rect}(\cdot / (2 \cdot))$	$\text{rect}(f)$

(g) Steg- och signumfunktionerna

Ett inrikatere problem är att beräkna transformerna för stegfunktionen:

$$u(t) = 1, \text{ om } t > 0 \text{ samt } = 0, \text{ om } t < 0$$

och den besläktade signumfunktionen:

$$\text{sign}(t) = \{1, \text{ om } t > 0 \text{ samt } = -1 \text{ om } t < 0\} = 2u(t) - 1.$$

För kännedom meddelas att man kan visa att

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1.	$u(t)$	$\frac{1}{i} + \cdot (\cdot)$	$\frac{1}{2} \frac{1}{if} + \frac{1}{2} (f)$
2.	$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{i}$	$\frac{1}{if}$

(h) Multiplikation faltning

De komplexa exponentialfunktionerna är, som vi sett tidigare, egenfunktioner till LTI-systemen med fouriertransformen för pulssvaret som egenvärde. Eller uttryckt med hjälp av faltning:

$$x(t) * e^{i \cdot t} = X(f) e^{i \cdot t},$$

$$y(t) * e^{i \cdot t} = Y(f) e^{i \cdot t}.$$

Låter vi $Z(\cdot)$ stå för transformen av $x(t) * y(t)$, så har vi (för fixt men godtyckligt och variabelt t):

$$\begin{aligned} Z(\cdot) \cdot e^{i \cdot t} &= (x(t) * y(t)) * e^{i \cdot t} = \text{Associativa lagen för faltning} = x(t) * (y(t) * e^{i \cdot t}) \\ &= x(t) * Y(\cdot) \cdot e^{i \cdot t} = Y(\cdot) \cdot (x(t) * e^{i \cdot t}) \\ &= Y(\cdot) \cdot X(\cdot) \cdot e^{i \cdot t} \end{aligned}$$

Division med faktorn $e^{i \cdot t}$ ger resultatet

$$Z(\cdot) = Y(\cdot) \cdot X(\cdot) = X(\cdot) \cdot Y(\cdot).$$

Faltning av två signaler svarar alltså mot multiplikation av deras fouriertransformer!

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1.	$(x * y)(t)$	$X(\cdot) \cdot Y(\cdot)$	$X(f) \cdot Y(f)$
2. Dualt	$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2} (X * Y)(\cdot)$	$(X * Y)(f)$

(i) Derivering multiplikation med variabel

Deriverar man analyskvationen får man $x'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i 2\pi f t} df$

där man avläser att derivatans fouriertransform $= i 2\pi f X(f)$:

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1.	$\frac{d}{dt} x(t)$	$i 2\pi f X(f)$	$2\pi i f X(f)$
2. Dualt	$t x(t)$	$i \frac{d}{df} X(f)$	$\frac{i}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$

För högre derivator får man motsvarande:

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1.	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(i 2\pi f)^n X(f)$	$(2\pi i f)^n X(f)$
2. Dualt	$t^n x(t)$	$i^n \frac{d^n}{df^n} X(f)$	$\frac{i^n}{2\pi^n} \frac{d^n}{df^n} X(f)$

Av särskilt intresse är

(j) Funktioner med rationella fouriertransformer

	Funktion	Transform ()	Transform (f)
1. Då n heltal ≥ 0	$t^n u(t)$	$(i 2\pi f)^{-n}$	$(2\pi i f)^{-n}$
2. Då $a > 0$	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{a + i 2\pi f}$	$\frac{1}{a + 2\pi i f}$
3. och n heltal ≥ 1	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{(a + i 2\pi f)^n}$	$\frac{1}{(a + 2\pi i f)^n}$
4. Då $a < 0$	$e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{a - i 2\pi f}$	$\frac{1}{a - 2\pi i f}$
5. och n heltal ≥ 1	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{(a + i 2\pi f)^n}$	$\frac{1}{(a + 2\pi i f)^n}$
6.	$\text{sign } t$	$\frac{2}{i}$	$\frac{1}{i f}$
7. Då n heltal ≥ 1	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \text{sign } t$	$\frac{2}{(i 2\pi f)^n}$	$\frac{2}{(2\pi i f)^n}$
8. Då $a > 0$	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$
9. Då $a > 0$	$e^{-a t } \text{sign } t$	$-\frac{2i}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$	$-\frac{4i f}{a^2 + (2\pi f)^2}$

Andra rationella funktioner kan man återtransformera genom att kombinera informationen i tabellen med partialbråksuppdelning, linearitet och förskjutningsegenskapen (c) ovan:

Exempel 7.2

a. Bestäm $x(t)$ så att $X(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$.

Lösning: Nämnaren har nollställena $s = -1$ och $s = -2$ och kan därför faktoruppdelas:

$$s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2).$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{s + 2} - \frac{1}{s + 1}$$

Låter vi parametern a i (j8) ovan spela rollen av $\sqrt{2}$ respektive 1, så ger tabellinformationen att det första bråket är transform av $2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|}$ och det andra av $\frac{1}{2} e^{-|t|}$. Man får

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|} - \frac{1}{2} e^{-|t|}.$$

b. Bestäm $x(t)$ så att $X(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5}$.

Lösning: Kvadratkomplettering av nämnaren ger $(s + 2)^2 + 1$. $X(j\omega)$ har alltså formen $Y(j(\omega + 2))$ där $Y(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$. Man har då

$$\frac{1}{2 + j\omega} \xrightarrow{FT^{-1}} \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

och via förskjutning $\frac{1}{(s + 2)^2 + 1} \xrightarrow{FT^{-1}} e^{i(-2)t} \cdot \frac{1}{2} e^{-|t|} = x(t)$.

c. Bestäm $x(t)$ så att $X(s) = \frac{1}{s^2 - 5s - 6i}$.

Lösning: På vanligt sätt bestämmer man nollställena till andragradspolynomet i nämnaren. De är $s = -2i$ och $s = -3i$. Nämnaren kan därför skrivas $s(s + 2i)(s + 3i)$. Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{s^2 - 5s - 6i} = \frac{1}{s(s + 2i)(s + 3i)} = \frac{1}{s + 3i} - \frac{1}{s + 2i}.$$

Vi får $\frac{1}{s + 3i} \xrightarrow{FT^{-1}} e^{-3t} u(t)$

$$\frac{1}{s + 2i} \xrightarrow{FT^{-1}} e^{-2t} u(t)$$

varför $X(s) \xrightarrow{FT^{-1}} x(t) = (e^{-3t} - e^{-2t}) u(t) = \begin{cases} e^{-3t} - e^{-2t}, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$

d. Bestäm $x(t)$ så att $X(s) = \frac{4 + 1}{s^2 + 1}$.

Lösning: Nämnarens grad är inte lägre än täljarens. Division med rest ger då omskrivningen

$$\frac{4 + 1}{2 + 1} = 2 - 1 + \frac{2}{2 + 1}. \quad (\text{Kontrollera!})$$

Enligt (j1) och (j8) har man

$$\begin{aligned} & 2 \quad FT^{-1} \quad - \quad \ddot{x}(t) \\ & 1 \quad FT^{-1} \quad (t) \\ & \frac{2}{2 + 1} \quad FT^{-1} \quad e^{-|t|} \end{aligned}$$

Detta ger att

$$x(t) = -\ddot{x}(t) - (t) + e^{-|t|}.$$

Övningar:

7.5 Bestäm fouriertransformen med f som variabel av $\text{sinc}^2(t)$ genom att använda tabellen vid (f) ovan och produkt-faltnings-sambandet j. (Se också övning 7.1 i ovan.)

7.6 a. Härled (j4) genom att kombinera (j2) och tidsrevertering (d3).

b. Härled (j9) genom att kombinera (j2) och (j4).

7.7 Använd tekniken med uppdelning i partialbråk för att bestämma funktionerna $x(t)$ som har följande fouriertransformer:

a. $\frac{1}{4 + 5 \cdot 2 + 4}$,

b. $\frac{2}{4 + 5 \cdot 2 + 4}$,

c. $\frac{i}{4 + 5 \cdot 2 + 4}$,

d. $\frac{i}{3 + 9}$,

e. $\frac{2}{2 + 9}$.

(k) Transform av primitiv funktion

Den primitiva funktionen $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ kan ses som en faltning: $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau =$

$$(x * u)(t), \text{ Dess transform är alltså } X(\omega) \cdot \frac{1}{i\omega} + X(0) \delta(\omega).$$

(l) Sampling med sampelavstånd T $(1/T)$ -periodisk fortsättning

Om en signal $x(t)$ samplas vid tidpunkterna $t = nT, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, så ges (se §4.3, sid 23) motsvarande sampelfunktion av

$$x_{\text{sampel}}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Eftersom enligt (e3) med f som variabel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{FT} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$$

och produkt svarar mot faltning, så är sampelsignalens transform:

$$X_{\text{sampel}}(f) = X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - n/T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n/T).$$

Man ser här att om frekvensvariabeln f används på transformsidan:

	Funktion	Transform (f)
	$x(t)$	$X(f)$
1.	Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$1/T$ -periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(f)$
2. Dualt	L -periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $1/L \cdot X(f)$ med sampelavstånd $1/L$

Med vinkelfrekvensen ω som variabel får man det mindre symmetriska

	Funktion	Transform (ω)
	$x(t)$	$X(\omega)$
3.	Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$2\pi/T$ -periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(\omega)$
4. Dualt	L -periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $2\pi/L \cdot X(\omega)$ med sampelavstånd $2\pi/L$

Vid sampling är alltså transformens värde för en frekvens f (alt. ω) proportionell mot summan av värdena av X i de många frekvenserna på avståndet n/T från f (alt. $2\pi n/T$). Dessa olika X -värden kan alltså inte särskiljas om man bara känner till X_{sampel} .

Exempel 7.3: Vilken är den 1-periodiska fortsättningen av $x(t) = \text{sinc } t$?

Att direkt summera $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t - n)}{(t - n)}$ ter sig som en svår uppgift.

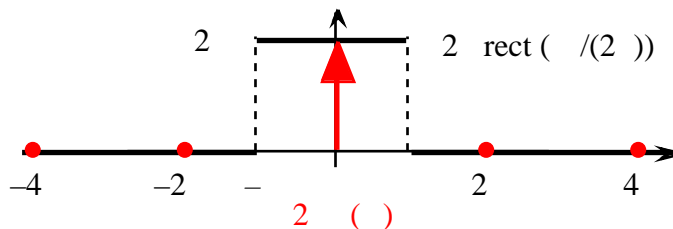
Om man istället noterar att

$$\text{sinc } t \stackrel{FT}{=} \text{rect}(t/2),$$

så utsäger sambandet (1.4) ovan, att fouriertransformen av $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - n)$ är samplingen av $2 \cdot \text{rect}(t/2)$ med sampelavståndet 2 . Men

$$2 \cdot \text{rect}(t/2) = \begin{cases} 2, & \text{om } |t| < 1, \\ 0, & \text{om } |t| > 1, \end{cases}$$

varför sampelvärdet för $t = 0$, är $= 2$, medan alla övriga är $= 0$.



Vi har alltså

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - n) \stackrel{FT}{=} 2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n),$$

eftersom
$$2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F T^{-1} 1$$

så medför detta att
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t-n) = 1 \text{ (konstant!)} \quad \blacksquare$$

7.4 Fourierserierna som specialfall av fouriertransformen

Fouriertransformen handhar i princip alla typer av signaler. Fourierserierna däremot handlar bara om periodiska signaler. Man kan då misstänka att fourierserieteori är ett speciellt fall fouriertransformteori. Att så faktiskt är fallet kan man inse så här:

Varje L -periodisk funktion $x(t)$ är den L -periodiska fortsättningen av funktionen:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t), & \text{om } |t| < L/2, \\ 0, & \text{om } |t| > L/2. \end{cases}$$

Enligt 4:e punkten i tabellen i (1) ovan kommer fouriertransformen $X(\omega)$ att vara samlingen av $\frac{1}{L} X_0(\omega)$ i punkterna $\omega = \frac{2\pi n}{L}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, d.v.s.

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{L} X_0(\omega - 2\pi n/L).$$

Så när som på en gemensam faktor 2, så är den n :te koefficienten i detta pulståg,

$$\frac{1}{L} X_0\left(\frac{2\pi n}{L}\right) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x(t) e^{-i 2\pi n t/L} dt = c_n,$$

tydligt identisk med den n :te fourierseriekoefficienten för $x(t)$

Syntesekvationen (7.3) för fouriertransformen ger sedan

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{2\pi n}{L}\right) e^{i 2\pi n t/L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{2\pi n}{L}\right) e^{i 2\pi n t/L} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i 2\pi n t/L}, \end{aligned}$$

vilket är syntesekvationen för fourierserier.

7.5 Parsevals relation för fouriertransformer.

För signaler $x(t)$ där

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

är konvergent – d.v.s. de som har en (ändlig) total energi⁸ – kan man också visa en "Parsevalsk" relation. Speciellt enkel är den om frekvensvariabeln f väljs på transformsidan:

⁸ Alla funktionerna som vi betraktar i den matematiska modellen för signalteori är inte av det slaget. Exempelvis är den totala energin hos konstanterna 0 och hos δ -pulserna inte ändlig och inte heller hos periodiska funktioner i allmänhet.

”Vektorns längd” i kvadrat = ”Summan” (läs *integralen*) av beloppskvadraterna på ”koordinaterna” $X(f)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (7.14)$$

För ω -variabeln får man istället

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (7.14')$$

Exempel 7.4

För funktionen $x(t) = \text{rect}(t)$ är normkvadraten (totalenergin)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1^2 dt = 1,$$

och vi vet (se §7.3(f)) att $X(f) = \text{sinc } f$. Parsevals relation utsäger då att

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 f df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 f}{f^2} df.$$

Efter litet hyfsning (sätt $f = \pi u$) kan detta skrivas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{1}{\pi}.$$

Övningar: ($u(t)$ betecknar enhetsprånget. Använd gärna tabell)

7.8 Beräkna fouriertransformerna till

- a. $e^{-2(t-1)} u(t-1)$,
- b. $e^{-2|t-1|}$,
- c. $(t+1) + (t-1)$
- d. $\frac{d}{dt} \{ u(-2-t) + u(t-2) \}$,
- e. $\sin(2t + \pi/4)$,
- f. $u(t) e^{-at} \cos bt, a > 0$,
- g. $e^{-3|t|} \sin 2t$,
- h. $\sum_{n=0}^{\infty} a^n (t-nT), |a| < 1, T > 0$,
- i. $t u(t) e^{-2t} \cos 4t$, t.ex. genom att använda resultatet från uppgift f.

7.9 Bestäm de signaler som har följande fouriertransformer

- a. $2 \delta(t) + \delta(t-4) + \delta(t+4)$,
- b. $\frac{2 \sin 3(\omega - 2)}{-2}$,
- c. $\cos(4t + \pi/3)$.

7.10 Signalen $x(t)$ har transformen $X(\omega)$. Uttryck följande funktioners fouriertransformer i $X(\omega)$:

a. $y_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$,

b. $y_2(t) = x(2t-8)$,

c. $y_3(t) = x''(t-8)$

7.11 Vilka signaler har följande fouriertransformer:

a. $Y_1(\omega) = u(\omega-1) - u(\omega-2)$, (u är enhetsprånget),

b. $Y_2(\omega) = \cos \omega \cdot \sin 2\omega$,

c. $Y_3(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \delta(\omega-n)$.

7.12 Använd det faktum att

$$e^{-|t|} \stackrel{FT}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1+\omega^2}$$

för att bestämma fouriertransformerna till:

a. $t e^{-|t|}$,

b. $\frac{4t}{(1+t^2)^2}$. (Ledning: Använd dualiteten hos FT.)

7.13 Beräkna $(\text{rect } t) * (\cos 2t + \cos t)$ genom att först fouriertransformera faltningen, förenkla resultatet och sedan återtransformera.

7.14 Bestäm signalen $x(t)$ om man vet att

$$X(\omega-1) + X(\omega+1) = G(\omega), \text{ där}$$

$$G(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{om } |\omega| < 2, \\ 0 & \text{om } |\omega| > 2. \end{cases}$$

7.15 Låt $x_L(t)$ vara den L -periodiska fortsättningen av $\text{sinc } t$,

$$x_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t-nL).$$

a. Verifiera att $x_L(t) = \frac{1}{L}$ (konstant) om $0 < L < 2$.

b. Verifiera att $x_L(t) = \frac{1}{L} \left(1 + 2 \cos \frac{2t}{L} \right)$, då $2 < L < 4$.

(Ledning: Använd samma metod som den i exempel 7.3.)

7.16 Ett idealt lågpasfilter har den egenskapen att det släpper igenom en signals alla frekvenser upp till en viss nivå L med oförändrade amplituder, medan de högre frekvenserna inte släpps igenom alls.

a. Om $x(t)$ har fouriertransformen $X(\omega)$, uttryck med hjälp av rect-funktionen transformen $X_L(\omega)$ för den filtrerade signalen $x_L(t)$.

- b. Bestäm $X_L(\omega)$ då $x(t) = e^{-t} u(t)$. $u(t)$ = "enhetssprånget" (Heavisides funktion).
- c. Hur stor andel av signalens energi går förlorad vid filtreringen? Ge en formel för detta i det allmänna fallet och tillämpa den på det speciella fallet i b-uppgiften.
- d. Verifiera att den andelen för stora L approximativt är $= \frac{2}{L}$ för fallet i b-uppgiften.
- e. Vilken är den filtrerade signalen för signalen i b-uppgiften? Svaret får innehålla integraler.

7.6 . Litet om approximation av fouriertransformer, en orientering

I en ideal värld skulle fouriertransformen av en signal $x(t)$ som man vill studera kunna beräknas enligt sin definition:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

I realiteten är $x(t)$ nästan aldrig helt känd – dels kan man kanske inte iaktta signalen under hela sin varaktighet, dels detekteras signalen inte i kontinuerlig tid utan bara vid vissa sampeltidpunkter. Man behöver därför rent allmänt göra en analys hur dessa två inskränkningar (trunkering respektive sampling) påverkar möjligheterna att skaffa fram goda approximationer till $X(\omega)$. Frågeställningen är inte alldeles enkel, så den analysen blir här i stor utsträckning informell.

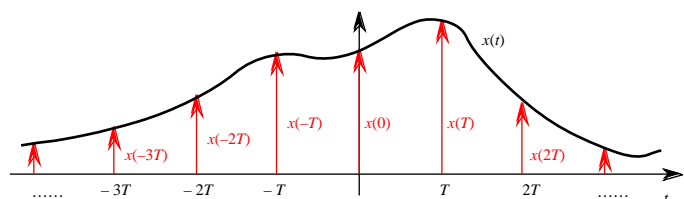
I. Trunkering

Med hjälp av rect-funktioner kan vi koncist beskriva trunkeringar. Om signalen $x(t)$ "klippas av" genom att den bara iakttas i intervallet $-P/2 < t < P/2$, så kan den trunkerade signalen $\hat{x}_P(t)$ skrivas

$$\hat{x}_P(t) = x(t) \text{rect}(t/P).$$

II. Sampling

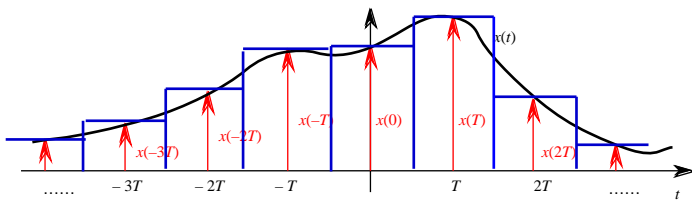
Samplas en signal $x(t)$ vid tiderna $t = nT$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ så kan motsvarande sampelvärden sammanfattas i ett pulståg



$$\hat{x}_S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

som i figuren ovan. Lägg märke till att $\hat{x}_S(t)$ är produkten av $x(t)$ med en speciell funktion som är oberoende av $x(t)$ – enhetspulståget

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$



Samtidigt kan funktionen $\hat{x}_T(t) = T \cdot \hat{x}_S(t)$ för små T uppfattas som en slags approximation till $x(t)$. Man har nämligen för godtyckliga integrationsintervall (se figuren):

$$T \cdot \hat{x}_S(t) dt = \int_{-M}^M x(nT) (t - nT) dt = \int_{-M}^M T x(nT) \delta(t - nT) dt$$

Detta kan tolkas som att medelimpulsen för de båda signalerna $x(t)$ och $\hat{x}_T(t)$ överensstämmer väl över godtyckliga intervall (om T är tillräckligt litet).

III. Trunkering och sampling

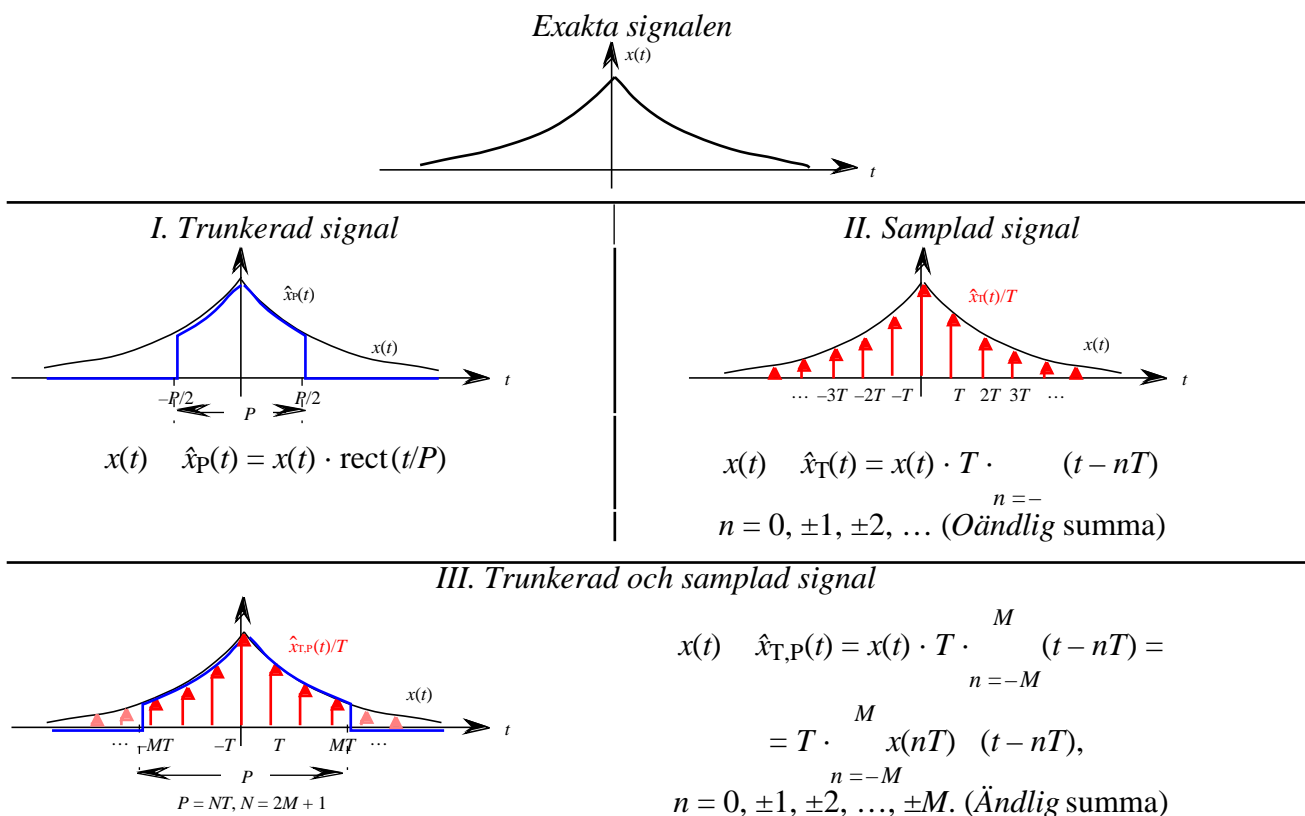
I mera realistiska modeller för uppmätning av signaler både samplar och trunkerar man. Om signalen samplas vid de $2M + 1$ tidpunkterna $t = nT, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$, så kan mätningarna beskrivas av pulståget

$$\hat{x}_{T,P}(t) = x(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-M}^M \delta(t - nT),$$

där P får stå för trunkeringsintervallens längd,

$$P = NT, \text{ där } N = 2M + 1 \text{ är antalet sampel.}$$

När det gäller den formelmässiga beskrivningen har vi sammanfattningsvis:



Fouriertransformerna för $\hat{x}_P(t)$, $\hat{x}_T(t)$ och $\hat{x}_{T,P}(t)$ kan misstänkas approximera fouriertransformen för $x(t)$ – i varje fall om P är ”tillräckligt stort” och T är ”tillräckligt litet”. Sambanden ovan kan användas för att närmare analysera hur parametrarna T och P påverkar det hela.

För detta är det nyttigt att hålla följande fakta i minnet.⁹

$$\begin{array}{lll}
 x(t) \cdot y(t) & \xrightarrow{FT} & X(f) * Y(f), \\
 x(t) * y(t) & \xrightarrow{FT} & X(f) \cdot Y(f), \\
 x(t-a) & \xrightarrow{FT} & e^{-2\pi i a f} \\
 T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT) & \xrightarrow{FT} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-n/T), \\
 \text{rect}(t/P) & \xrightarrow{FT} & P \text{ sinc}(Pf).
 \end{array}$$

Fall I. Fel från trunkering

Man har $\hat{x}_P(t) = x(t) \cdot \text{rect}(t/P) \xrightarrow{FT} \hat{X}_P(f) = X(f) * P \text{ sinc}(Pf)$

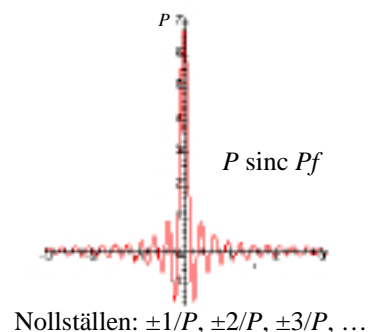
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f-\nu) P \text{ sinc}(P\nu) d\nu.$$

En heuristisk tolkning av uttrycket för transformen kan se ut så här: Nyssnämnda faltning kan ses som att man ersätter $X(f)$ med ett glidande medelvärde där funktionen $P \text{ sinc}(Pf)$ anger vilken ”vikt” man ger det funktionsvärde i punkten som ligger ν enheter ifrån f .¹⁰ Eftersom $P \text{ sinc}(Pf)$ för stora P väsentligen är 0 bara i närheten av $\nu = 0$, så kommer man då att bilda ett slags mycket ”lokala” medelvärden – grafen för $\hat{X}_P(f)$ blir en ”blurred” variant av grafen för $X(f)$.

På grund denna medelvärdesbildning kan felen förväntas bli större i punkter där $X(f)$ varierar kraftigt än i punkter där $X(f)$ är relativt konstant.

Eftersom $1/P$ är ett mått på bredden hos huvudloben hos viktsfunktionen – dess nollställen närmast origo är $\pm 1/P$ – kan man via den parametern få en uppfattning om hur nära två frekvenstoppar kan få ligga för att de efter medelvärdesförfarandet fortfarande skall gå att ”känna igen”. Storheten $1/P$ tas som ett ingenjörsmässigt mått på *frekvensupplösningen*.

Om man exempelvis vill mäta upp frekvensen hos en ton med en önskad noggrannhet på 0,01 Hz så bör mätningens varaktighet åtminstone vara bortåt $1/0,01 = 100$ sekunder.



⁹ Vi föredrar här att använda varvfrekvensen f i stället för vinkelfrekvensen ω , $f = \omega/(2\pi)$.

¹⁰ Obs att vi vet att $\int_{-\infty}^{\infty} P \text{ sinc}(P\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\nu) d\nu = 1$.

Fall II. Fel från sampling

$$\begin{aligned} \text{Här har vi } \hat{x}_T(t) &= x(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \xrightarrow{FT} \quad \hat{X}_T(f) = X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n/T). \end{aligned}$$

Detta betyder att $\hat{X}_T(f)$ exakt är den $1/T$ -periodiska fortsättningen till $X(f)$.

För *bandbegränsade* signaler (sådana där $X(f) = 0$ utanför något ändligt frekvensintervall $|f| < B$) kan man för tillräckligt stora värden på $1/T$ ($2 \times B$) exakt rekonstruera $X(f)$ ur summan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n/T)$.

Man har ju att $X(f) = \hat{X}_T(f)$ för f inom bandet och $= 0$ utanför.

För signaler som inte är bandbegränsade, men där spektret avtar "snabbt" mot 0 då $f \rightarrow \pm \infty$, så har man istället att $X(f) \approx \hat{X}_T(f)$, för "måttliga" f .

De felaktigheter man får då, härrör från termerna $X(f - n/T)$, $n \neq 0$, i summan. Man kan alltså för ett visst f -värde utifrån enbart $\hat{X}_T(f)$ inte skilja på $X(f)$:s värden i de olika frekvenserna $f - n/T$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Detta är den s.k. *alias-effekten*. Denna blir – återigen förutsatt att $X(f)$ avklingar "snabbt" mot 0 – mindre uttalad ju mindre sampelavståndet är.

Sampelintervallet T kan enligt detta väljas genom att man först bestämmer en "bandgräns" B ovanför vilken signalens frekvenser kan försummas,¹¹ sedan tar $T < 1/(2B)$.

Fall III. Fel från trunkering och sampling

Den approximation till $x(t)$ man i detta fall arbetar med är

$$x(t) \hat{x}_{T,P}(t) = x(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-M}^M \delta(t - nT), \text{ där } P = (2M + 1)T = NT. \quad (12)$$

Man åstadkommer det uttrycket genom att man först multiplicerar $x(t)$ med $\text{rect}_P(t)$ (d.v.s. bara betraktar signalen i tidsintervallet $-P/2 \leq t \leq P/2$) och sedan multiplicerar med $T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, (d.v.s. samplar med sampelintervallet T) eller vice versa. Faltningssatsen ger då att

$$\hat{x}_{T,P}(f) \xrightarrow{FT} X(f) * P \text{sinc } Pf * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$$

$\hat{X}_{T,P}(f)$ åstadkoms alltså utifrån $X(f)$ genom en medelvärdesbildning (faltningen med $P \text{sinc } Pf$) åtföljd av en $1/T$ -periodisk fortsättning (faltningen med $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T)$) eller vice versa.

Vi har vidare att

¹¹ Exempelvis kan man tillse att energiandelen, $\int_{|f| > B} |X(f)|^2 df / \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$, som ligger utanför bandet håller sig under någon godtagbar gräns.

¹² Notera att N alltid är ett udda heltal i detta sammanhang.

$$\hat{x}_{T,P}(t) = T \cdot \sum_{n=-M}^M x(nT) \delta(t-nT) \quad FT \quad \hat{X}_{T,P}(f) = T \cdot \sum_{n=-M}^M x(nT) e^{-2\pi i n T f},$$

Som approximation till fouriertransformen $X(f)$ får vi alltså första hand detta summauttryck för $\hat{X}_{T,P}(f)$.

Storheterna P (trunkeringsintervallet) och T (sampelavståndet) väljer man lämpligen enligt principerna beskrivna i de båda fallen ovan.

Med tanke på att upplösningen är av storleksordningen $1/P$ är det rimligt att beräkna summan bara för frekvenser i sampelpunkter på avståndet $1/P$ från varandra, t.ex. $f = k/P$, k heltal. Och eftersom alias-effekten kan göra sig gällande för frekvenser $|f| > 1/(2T) = N/(2P)$, så bör k väljas så att

$$|k|/P < N/(2P) = (2M+1)/(2P), \text{ dvs. } |k| < M.$$

Man har alltså att beräkna de N summorna

$$\hat{X}_{T,P}(k/P) = T \sum_{n=-M}^M x(nT) e^{-2\pi i n k / N}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm M \quad (13)$$

vilka sedan tjänar som approximationer till $X(k/P)$. Denna procedur transformerar tydligen talföljden $x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm M$ till talföljden $\hat{X}_{T,P}(k/P)$, $k = 0, \pm 1, \dots, \pm M$.

Proceduren, bortsett från faktorn T :

$$X[k] = \sum_{n=-M}^M x(nT) e^{-2\pi i n k / N}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad N = \text{antalet termer i summorna,}$$

går under namnet *den diskreta fouriertransformen* (DFT:n).

DFT:n stora betydelse ligger i, att den kan beräknas med ett *ändligt antal* räkneoperationer. Det är denna transform som i praktiken beräknas när man bearbetar samplade och trunkerade signaler i maskinellt i datorer. De andra båda fouriertransformerna (FT, FS) kräver att man beräkningar oändliga serier eller integraler. Dessutom förutsätter de att man känner signalen under kontinuerlig tid, vilket man i realiteten aldrig gör.

I realistiska fall är talet N mycket stort – 100 000 eller mera är inget ovanligt – varför räknearbetet ändå kan bli betydande. En viktig innovation gjordes för inte så länge sedan (Cooley och Tukey, 1965). Man konstruerade en beräkningsalgoritm för DFT:n – Fast-Fourier-Transform – som gör det möjligt att nedbringa antalet nödvändiga räkneoperationer avsevärt:

Använder man transformationssambandet i DFT:n rätt upp och ner, så behöver man göra N st multiplikationer för varje koefficient, d.v.s. sammantaget N^2 multiplikationer. Cooley och Tukey utnyttjade en omskrivning av transformationssambanden, som för det fall att $N = N_1 \cdot N_2$, gör det möjligt att komma undan med $N \cdot (N_1 + N_2)$ multiplikationer. Bäst fungerar algoritmen om N är en 2-potens. Antalet multiplikationer blir då (högst) $2N \log_2 N$. För $N = 1024 = 2^{10}$ exempelvis, kräver den ”rakt-upp-och-ner”-beräkning i allmänhet fler än 10^6 multiplikationer, medan FFT behöver högst $2 \cdot 1024 \cdot 10 = 2 \cdot 10^4$ – en besparing på närmare 98%! ⁽¹⁴⁾

¹³ Obs att $Tk/P = k/N$.

¹⁴ Den Cooley-Tukeyska omskrivningen är dock inte alldeles ”ny”, den utnyttjades redan under 1800-talets första hälft i andra, men besläktade sammanhang av Gauss.

Svar till övningarna:

- 7.1.** a. 2, b. e^t , c. e^{-t} , d. $2t$,
 e. 1, f. t , g. $t^2 + \frac{1}{12}$,
 h. 1 , om $t > 1/2$,
 $t + 1/2$, om $|t| = 1/2$, i. $1 - |t|$, om $|t| < 1$, 0 annars,
 0, om $t < -1/2$,
 j. t om $t \geq 0$, = $t \cdot u(t)$, k. $(e^{1/2} - e^{-1/2}) e^{-t}$,
 0, om $t < 0$, l. e^{2t} , m. e^{it} , n. $\cos t$, o. $\sin t$,
 p. $(t-2)$.

7.4 $x(t) * \cos(\omega t) = i X(\omega) \cdot \sin(\omega t)$ och $x(t) * \sin(\omega t) = -i X(\omega) \cdot \cos(\omega t)$.
 (Obs att $x(t)$ är udda och reellvärd (om och) endast om $X(\omega)$ är (udda och) imaginär, d.v.s. har realdel = 0.)

7.5. $1 - |f|$, om $|f| \leq 1$; 0 annars.

- 7.7** a. $\frac{1}{6} e^{-|t|} - \frac{1}{12} e^{-2|t|}$, b. $-\frac{1}{6} e^{-|t|} + \frac{1}{3} e^{-2|t|}$, c. $\frac{1}{6} e^{-2|t|} - \frac{1}{6} e^{-|t|} \operatorname{sign} t$,
 d. $\frac{1}{18} (e^{-3|t|} - 1) \operatorname{sign} t$, e. $(t) - \frac{3}{2} e^{-3|t|}$.

- 7.8** a. $\frac{e^{-i}}{2+i}$, b. $\frac{4 e^{-i}}{4+i^2}$, c. $2 \cos$
 d. $-2i \sin$, e. $\{e^{-i/4} (-2) + e^{i/4} (+2)\}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{(1-i)(-2) + (1+i)(+2)\}$$

(Ledning: $\sin(\omega t + \phi) = -2i (e^{i(\omega t + \phi)/4} - e^{-i(\omega t + \phi)/4})$)

f. $\frac{a+i}{(a+i)^2 + b^2}$, (Ledning: Transformer t.ex $u(t) e^{-at}$ och $\cos bt$, enligt faltningsegenskapen är svaret $1/2 \times$ faltningen av dessa transformer. Obs också att $x(t) * (t-a) = x(t-a)$.)

g. $-3i \frac{1}{9 + (-2)^2} - \frac{1}{9 + (+2)^2}$. (Ledning: Transformer $e^{-3|t|}$ och $\sin 2t$ var för sig, använd sedan faltningsegenskapen med faltningen på transformsidan.)

h. $\frac{1}{1 - a e^{-i T}}$. (Ledning: Transformer termvis. Man får en geometrisk serie som kan summeras.)

i. $\frac{(2+i)^2 - 16}{((2+i)^2 + 16)^2}$. (Ledning: Derivera på transformsidan.)

- 7.9** a. $1 + \cos(4t)$, b. $e^{2it} \operatorname{rect}(t/6)$. (Ledning: Givna transformen = $6 \operatorname{sinc}(3(\omega - 2)/\omega)$.)
 c. $\frac{1}{2} (e^{-i/3} (t-4) + e^{i/3} (t+4))$.

7.10 a. $Y_1(\omega) = 2 \cos \omega X(-\omega)$, b. $Y_2(\omega) = \frac{1}{2} e^{-4i\omega} X(\omega/2)$, c. $Y_3(\omega) = -2 e^{-8i\omega} X(\omega)$.

7.11 a. $y_1(t) = \frac{1}{2} e^{3it/2} \text{sinc}(t/(2)) = e^{3it/2} \frac{\sin t/2}{t}$. (Ledning: $Y_1(\omega) = \text{rect}(\omega - 3/2)$.)

b. $y_2(t) = ((t+3) - (t-3) + (t+1) - (t-1))/(4i)$. (Ledning: Använd t.ex. Eulers formler.)

c. $y_3(t) = \frac{1}{2 - e^{it}}$

7.12 a. $\frac{-4i}{(1 + \omega^2)^2}$, b. $-2i e^{-|\omega|}$.

7.13 $2 \sin(\omega/2) \cos \omega t$. (Obs att $\text{sinc} 1 = \text{sinc}(-1) = 0$ och att $\text{sinc}(\omega/2) = \text{sinc}(-\omega/2) = 2 \sin(\omega/2)$.)

7.14 $\frac{2 \sin t}{t}$. (Obs att $G(\omega) = 2 \text{rect}(\omega/4)$. Ett mellanresultat: $2 x(t) \cos t = \frac{4}{t} \text{sinc}(2t/)$.)

7.16 a. $X_L(\omega) = X(\omega) \cdot \text{rect}(\omega/(2L))$.

b. $X_L(\omega) = \frac{1}{1+i} \cdot \text{rect}(\omega/(2L))$.

$|X(\omega)|^2 d\omega$

c. $1 - \frac{-L}{|X(\omega)|^2 d\omega}$ respektive $1 - \frac{2}{\arctan L} = \frac{2}{\arctan \frac{1}{L}}$.

$|X(\omega)|^2 d\omega$

d. Använd t.ex. MacLaurinutvecklingen: $\arctan s = s + O(s^3)$. Sätt $s = \frac{1}{L}$ i denna.

e. $x_L(t) = x(t) * \frac{L}{t} \cdot \text{sinc} \frac{Lt}{t} = \frac{L}{t} \int_0^t e^{-\tau} \text{sinc} \frac{L(t-\tau)}{t} d\tau = \frac{L}{t} \int_0^t e^{-(t-\tau)} \text{sinc} \frac{L}{t} d\tau =$
 $= \frac{L}{t} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \text{sinc} \frac{L}{t} d\tau = \frac{1}{t} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \sin L d\tau$