Institutionen för matematik
KTH

Kompletterande formelblad för kursen 5B1207

1. Speciella funktioner

Språngfunktionen (Heavisides funktion) $u(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$

Signumfunktionen $\operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$

Rektangelfunktionen $\operatorname{rect} t = \begin{cases} 1, & \text{om } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{om } |t| > 1/2. \end{cases}$

Sinus cardinalis (”Sincen”) $\operatorname{sinc} t = \begin{cases} (\sin \pi t)/(\pi t), & \text{om } t \neq 0, \\ 1, & \text{om } t = 0. \end{cases}$

δ-*funktionen*:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t \neq 0, \\ \text{odefinierad}, & \text{om } t = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\,dt = 1 \text{ för alla konstanta } a.$$

Om $x(t)$ är kontinuerlig för $t = a$:

$$x(t)\cdot\delta(t-a) = x(a)\cdot\delta(t-a),$$

Skalning:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \text{ om } a \neq 0.$$

2. Generaliserad derivering

Om $x(t)$ är en sträckvis deriverbar funktion med språngdiskontinuiteter $d_1, d_2, \ldots$ i punkterna $a_1, a_2, \ldots$, dvs. $d_i = x(a_i+) - x(a_i-)$, så är

$$x'(t) = \{x'(t)\} + d_1\delta(t-a_1) + d_2\delta(t-a_2) + \ldots$$

($x'(t)$ är den generaliserade derivatan, $\{x'(t)\}$ den klassiska).

Speciellt:

$$u'(t) = \delta(t), \quad \frac{d}{dt}\operatorname{sign}(t) = 2\delta(t), \quad \frac{d}{dt}\operatorname{rect}(t) = \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2).$$

Derivering av δ-*pulser*:

Om $x'(t)$ kontinuerlig i $t = a$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta'(t-a)\,dt = -x'(a)$

Om $x^{(n)}(t)$ kontinuerlig i $t = a$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta^{(n)}(t-a)\,dt = (-1)^n x^{(n)}(a)$

3. Periodicitet

P-periodicitet, ($P > 0$):

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodisk} \Leftrightarrow x(t+P) = x(t) \text{ för alla } t.$$

P-periodisk fortsättning:

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodiska fortsättningen av } y(t) \Leftrightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nP).$$

4. Faltning

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) * (a\, y(t)) = a\,(x(t) * y(t)), \qquad x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t), \qquad (x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$$

$$x(t) * \delta(t - a) = x(t - a), \qquad x(t) * \delta^{(n)}(t - a) = x^{(n)}(t - a)$$

4. Komplex fourierserieutveckling av *P*-periodiska funktioner:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2\pi i n t/P}, \quad \text{(Syntesekvationen)}$$

$$\text{där } c_n = \frac{1}{P}\int_P x(\tau)\, e^{-2\pi i n \tau/P}\, d\tau. \text{ (Analysekvationen)}$$

Samband med reell serieutveckling för reella $x(t)$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2\pi n t/P + b_n \sin 2\pi n t/P),$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \text{ om } n \geq 1 \text{ och } = \frac{1}{2}(a_{-n} + i b_{-n}) \text{ om } n \leq -1 \text{ samt } = \frac{a_0}{2} \text{ om } n = 0,$$

$$a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, \text{ då } n \geq 0, \text{ och } b_n = -2 \operatorname{Im} c_n, \text{ då } n \geq 1.$$

Funktionsnorm

$$\|x(t)\| = \left(\int_P |x(t)|^2\, dt \right)^{1/2}$$

Totalenergi (under 1 period):

$$\|x(t)\|^2 = \int_P |x(t)|^2\, dt.$$

Medeleffekt

$$\frac{1}{P}\int_P |x(t)|^2\, dt.$$

Parsevals relation

$$\frac{1}{P}\int_P |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

5. Fouriertransformen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad \text{(Syntesekvationen)}$$

$$\text{där } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{(Analysekvationen)}$$

Funktionsnorm

$$\|x(t)\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

Totalenergi

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt.$$

Parsevals relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega.$$

6. LTI-system

Pulssvar

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\quad h \quad} \longrightarrow h(t)$$

och utsignal generellt:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad h \quad} \longrightarrow h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$$

Harmonisk insignal ger harmonisk utsignal:

$$e^{i\omega t} \longrightarrow \boxed{\quad h \quad} \longrightarrow H(\omega)\cdot e^{i\omega t}$$

där $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ är *överföringsfunktionen*.

Överföringsfunktionen roll:

Om $x(t) \longrightarrow \boxed{\quad h \quad} \longrightarrow y(t)$,

så är $Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$.

Sammansättning (seriekoppling) av LTI-system:

$$\delta(t) \longrightarrow \underbrace{\boxed{\boxed{\quad h \quad} \longrightarrow \boxed{\quad k \quad}}}_{l} \longrightarrow l(t) = k(t) * h(t)$$

och för motsvarande överföringsfunktioner: $L(\omega) = K(\omega)\cdot H(\omega)$

7. Tabell över fouriertransformer

Allmänna egenskaper:

Dualitet

Funktion	Transform
Om $x(t)$	$Z(\omega)$
så $Z(t)$	$2\pi \cdot x(-\omega)$

Övrigt

Funktion	Transform
$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}\, x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}\, X(\omega)$
$x(at)$, $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$(x * y)(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$i\omega\, X(\omega)$
$t\, x(t)$	$i \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(i\omega)^n X(\omega)$
$t^n x(t)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$
Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$2\pi/T$-periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(\omega)$
L-periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $2\pi/L \cdot X(\omega)$ med sampelavstånd $2\pi/L$

Speciella transformer

Funktion	Transform
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\,\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$
$\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)$	$e^{-i\omega t_0} + e^{i\omega t_0} = 2\cos(\omega t_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\,(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$\delta(t - t_0) - \delta(t + t_0)$	$e^{-i\omega t_0} - e^{i\omega t_0} = -2i\sin(\omega t_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-\pi i\,(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$2\pi/T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$
$u(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\,\delta(\omega)$
$\operatorname{sign}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$
$\operatorname{rect}(t/P)$	$P\operatorname{sinc}(P\omega/(2\pi))$
$\operatorname{sinc}(t/(2\pi))$	$2\pi\operatorname{rect}(\omega)$
$\operatorname{sinc}(t)$	$\operatorname{rect}(\omega/(2\pi))$

Funktioner med rationella transformer

Konstanten a förutsätts vara > 0

Funktion	Transform
$\delta^{(n)}(t)$	$(\mathrm{i}\omega)^n$
$e^{-at}\,u(t)$	$\frac{1}{a + \mathrm{i}\omega}$
$e^{-\mathrm{i}at}$ sign t	$\frac{2\mathrm{i}}{a + \omega}$
$\frac{t^{n-1}\,e^{-at}}{(n-1)!}\,u(t)$	$\frac{1}{(a + \mathrm{i}\omega)^n}$
$\mathrm{i}^n\,\frac{t^{n-1}\,e^{-\mathrm{i}at}}{(n-1)!}$ sign t	$\frac{2}{(a + \omega)^n}$
$e^{at}\,u(-t)$	$\frac{1}{a - \mathrm{i}\omega}$
$e^{\mathrm{i}at}$ sign t	$-\frac{2\mathrm{i}}{a - \omega}$
$\frac{(-t)^{n-1}\,e^{at}}{(n-1)!}\,u(-t)$	$\frac{1}{(a - \mathrm{i}\omega)^n}$
$\frac{t^{n-1}\,e^{\mathrm{i}at}}{\mathrm{j}^n(n-1)!}$ sign t	$\frac{2}{(a - \omega)^n}$
sign t	$\frac{2}{\mathrm{i}\omega}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ sign t	$\frac{2}{(\mathrm{i}\omega)^n}$
$e^{-a\lvert t \rvert}$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-a\lvert t \rvert}$ sign t	$-\frac{2\mathrm{i}\omega}{a^2 + \omega^2}$
sin at sign t	$\frac{2a}{a^2 - \omega^2}$
cos at sign t	$\frac{2\mathrm{i}\omega}{a^2 - \omega^2}$