

Kompletterande formelblad för kursen 5B1207

1. Speciella funktioner

<i>Språngfunktionen (Heavisides funktion)</i>	$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t < 0. \end{cases}$
<i>Signumfunktionen</i>	$\text{sign } t = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$
<i>Rektangelfunktionen</i>	$\text{rect } t = \begin{cases} 1, & \text{om } t < 1/2, \\ 0, & \text{om } t > 1/2. \end{cases}$
<i>Sinus cardinalis ("Sincen")</i>	$\text{sinc } t = \begin{cases} (\sin t)/t, & \text{om } t \neq 0, \\ 1, & \text{om } t = 0. \end{cases}$

-funktionen:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{om } t < 0, \\ \text{odefinierad}, & \text{om } t = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (t-a) \delta(t-a) dt = 1 \text{ för alla konstanta } a.$$

Om $x(t)$ är kontinuerlig för $t = a$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-a) dt = x(a).$$

Skalning:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \text{ om } a \neq 0.$$

2. Generaliserad derivering

Om $x(t)$ är en sträckvis deriverbar funktion med språngdiskontinuiteter d_1, d_2, \dots i punkterna a_1, a_2, \dots , dvs. $d_i = x(a_i+) - x(a_i-)$, så är

$$x'(t) = \{x'(t)\} + d_1 \delta(t-a_1) + d_2 \delta(t-a_2) + \dots$$

($\{x'(t)\}$ är den generaliserade derivatan, $\{x'(t)\}$ den klassiska).

Speciellt:

$$u'(t) = \delta(t), \quad \frac{d}{dt} \text{sign } t = 2 \delta(t), \quad \frac{d}{dt} \text{rect } t = \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2).$$

Derivering av -pulser:

Om $x'(t)$ kontinuerlig i $t = a$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t-a) dt = -x'(a)$

Om $x^{(n)}(t)$ kontinuerlig i $t = a$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta^{(n)}(t-a) dt = (-1)^n x^{(n)}(a)$

3. Periodicitet

P-periodicitet, ($P > 0$):

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodisk} \quad x(t + P) = x(t) \text{ för alla } t.$$

P-periodisk fortsättning:

$$x(t) \text{ är } P\text{-periodiska fortsättningen av } y(t) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - nP).$$

4. Faltning

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) y(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} x(t) * (a y(t)) &= a (x(t) * y(t)), & x(t) * (y(t) + z(t)) &= x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \\ x(t) * y(t) &= y(t) * x(t), & (x(t) * y(t)) * z(t) &= x(t) * (y(t) * z(t)) \\ x(t) * (t - a) &= x(t - a), & x(t) * (t^n) &= x^{(n)}(t - a) \end{aligned}$$

4. Komplex fourierserietveckling av *P*-periodiska funktioner:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / P}, \text{ (Syntesekvationen)}$$

$$\text{där } c_n = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) e^{-2\pi i n t / P} dt. \text{ (Analysekvationen)}$$

Samband med reell serietveckling för reella $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n t / P + b_n \sin 2\pi n t / P), \\ c_n &= \frac{1}{2} (a_n - i b_n) \text{ om } n \geq 1 \text{ och } = \frac{1}{2} (a_{-n} + i b_{-n}) \text{ om } n \leq -1 \text{ samt } = \frac{a_0}{2} \text{ om } n = 0, \\ a_n &= 2 \operatorname{Re} c_n, \text{ då } n \geq 0, \text{ och } b_n = -2 \operatorname{Im} c_n, \text{ då } n \geq 1. \end{aligned}$$

Funktionsnorm

$$\|x(t)\| = \sqrt{\frac{1}{P} \int_0^P |x(t)|^2 dt}$$

Totalenergi (under 1 period):

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{P} \int_0^P |x(t)|^2 dt.$$

Medeleffekt

$$\frac{1}{P} \int_0^P |x(t)|^2 dt.$$

Parsevals relation

$$\frac{1}{P} \int_0^P |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

5. Fouriertransformen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \text{ (Syntesekvationen)}$$

$$\text{där } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \text{ (Analysekvationen)}$$

Funktionsnorm

$$\|x(t)\| = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Totalenergi

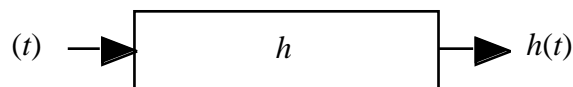
$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

Parsevals relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega.$$

6. LTI-system

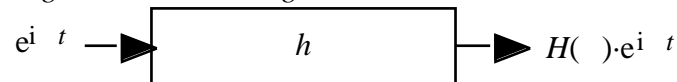
Pulssvar



och utsignal generellt:



Harmonisk insignal ger harmonisk utsignal:



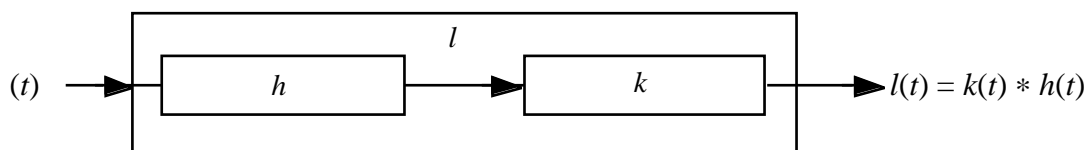
där $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$ är överföringsfunktionen.

Överföringsfunktionen roll:



så är $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$.

Sammansättning (seriekoppling) av LTI-system:



och för motsvarande överföringsfunktioner: $L(\omega) = K(\omega) \cdot H(\omega)$

7. Tabell över fouriertransformer

Allmänna egenskaper:

Dualitet

Funktion	Transform
Om $x(t)$	$Z(\omega)$
så $Z(\omega)$	$2\pi \cdot x(-t)$

Övrigt

Funktion	Transform
$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{i\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} X(\omega)$
$x(at), a > 0$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$(x * y)(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} (X * Y)(\omega)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$i\omega X(\omega)$
$t x(t)$	$i \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(i\omega)^n X(\omega)$
$t^n x(t)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$
Sampling av $x(t)$ med sampelavstånd T	$2\pi/T$ -periodisk fortsättning av $1/T \cdot X(\omega)$
L -periodisk fortsättning av $x(t)$	Sampling av $2\pi/L \cdot X(\omega)$ med sampelavstånd $2\pi/L$

Spezielle transformen

Funktion	Transform
$\delta(t)$	1
1	$2\pi \delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
$\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)$	$e^{-i\omega t_0} + e^{i\omega t_0} = 2 \cos(\omega t_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$\delta(t - t_0) - \delta(t + t_0)$	$e^{-i\omega t_0} - e^{i\omega t_0} = -2i \sin(\omega t_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-\frac{i}{2} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$
$u(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega)$
$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$
$\text{rect}(t/P)$	$P \text{sinc}(P\omega/(2\pi))$
$\text{sinc}(t/(2\pi))$	$\frac{1}{2} \text{rect}(\omega/P)$
$\text{sinc}(t)$	$\text{rect}(\omega/(2\pi))$

Funktioner med rationella transformer

Konstanten a förutsätts vara > 0

Funktion	Transform
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{(s-i)^{n+1}}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$e^{-iat} \text{sign } t$	$\frac{2i}{s^2+a^2}$
$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$i^n \frac{t^{n-1} e^{-iat}}{(n-1)!} \text{sign } t$	$\frac{2}{(s-i)^n}$
$e^{at} u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$
$e^{iat} \text{sign } t$	$-\frac{2i}{s^2+a^2}$
$\frac{(-t)^{n-1} e^{at}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\frac{t^{n-1} e^{iat}}{j^n(n-1)!} \text{sign } t$	$\frac{2}{(s-i)^n}$
$\text{sign } t$	$\frac{2}{i}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \text{sign } t$	$\frac{2}{(i)^n}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2+s^2}$
$e^{-a t } \text{sign } t$	$-\frac{2i}{a^2+s^2}$
$\sin at \text{sign } t$	$\frac{2a}{a^2-s^2}$
$\cos at \text{sign } t$	$\frac{2i}{a^2-s^2}$