Matematiska Institutionen, KTH

5B1209 Signaler och system. I, för E2
Konstrollskrivning nr 1, onsdag 2003-11-12 kl 9.15 - 10.00

Tillåtna hälpmedel: Kursböcker kursmatrial, kursbcker, tabeller, ej egna noteringar.

Namm: Födelsenr:

Låt N = 3+ sista siffran i ditt födelsenr.
Sätt in ditt N = i texten nedan.

Uppgifter

På halva antalet uppgiftsblad var ordningen mellen uppgifterna omkastad.

1. Låt signalen $y(t)$ av den tidkontinueliga variablen t vara given genom

$$y(t) = \begin{cases} t^2 & \text{när } 0 \le t \le N \\ 0 & \text{för övriga } t. \end{cases}$$

Finn den generaliserade funktion som är derivatan till signalen $y(t)$. (2p)

Svar:

$$h(t) - N^2\delta(t-N)$$

där

$$h(t) = \begin{cases} 2t & \text{när } 0 < t < N, \\ 0 & \text{övriga } t. \end{cases}$$

och $\delta(t)$ är Dirac delta funktionen i origo.

---

2. (a) Skriv up cosinusserien för signaler på intervallet $0 \le t <$ N (1p)

Svar:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi}{N}kt$$

(b) Ge en formel att beräkna koefficienterna i denna cosinusserie. (1p)

Svar:

$$a_k = \frac{2}{N}\int_0^N y(t)\cos\frac{\pi}{N}ktdt$$

där $y(t)$ är den givna signalen på intervallet $0 \le t <$ N.

(c) Om cosinusserien ovan konvergerar, så konvergervar den mot en periodisk funktion.Vad blir perioden av denna funktion.

Svar: 2N (1p)

3. Given signalen

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{när } 0 \leq t < 2 \\ \\ 0 & \text{när } 2 \leq t < \text{N} \end{cases}$$

(a) För vilka t konvergerer cosinusserien till $x(t)$. (0.5p)

Svar:
Signalen $x(t)$ har en cosinusserie som konvergerar för alla t.
Det blev ett tolkningsproblem på denna uppgift. Många har uppfattat att frågan gällde när cosinusserien konvergerar mot funktionsv:ardet $x(t)$. Svaret pådetta är att detta sker i alla punkter där $x(t)$ är definierad och utvidgningen till en jämn periodisk funktion är kontinuerlig. dvs i alla punkter på intervallet $0 \leq t < N$ utom i punkten $t = 2$.

(b) Vad konvergerar cosisnusserien mot i vid tidpunkterna:

$t = -1$ Svar:1 (0.5p)

$t = 1$ Svar:1 (0.5p)

$t = 2$ Svar: 1 (0.5p)

Extra poäng för motivering av svaret: (1p)

Funktionen upplyller Direlchlets villkor:

i. Den är kontuerlig utom i ändligt många punkter
ii. Den har ändligt många lokala maxima och minima.
iii. Den har begränsade språng i discontinuitetspunkterna

Den konvergerer då mot den utvidgade funktionen $x(t)$ i dess kontinuitetspunkter och mot $\frac{1}{2}(x(t_+) + x(t_-))$ i diskontinuitetspunkterna.

4. Låt signalen $z(t)$ av den tidkontinueliga variablen t vara given på intervallet $0 \leq t < \pi$ vara given av

$$z(t) = \begin{cases} 1 & \text{när } 0 \leq t < \pi/3 \\ 0 & \text{för } \pi/3 \leq t < \pi. \end{cases}$$

Vi ska approximera signalen med den lågfrekventa signalen

$$A + B\cos t + C\cos 2t.$$

Finn konstanterna A, B och C så att det kvadratiska felet

$$\int_0^\pi |z(t) - (A + B\cos t + C\cos 2t)|^2 dt$$

blir så liten som möjligt (3 p)

Svar: Funktionerna 1, $\cos t$ och $\cos 2t$ är de tre första funktionerna i cosinusserien till signaler i intervallet $0 < t < \pi$.
Den minsta integralen får vi om vi väljer A, B och C så att vi får de tre första termerna i cosinusserien till $z(t)$, dvs $A = a_0/2$, $B = a_1$ och $C = a_2$ där

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi z(t)\cos ktdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/3} \cos ktdt.$$

Vi får då $a_0 = 2/3$, $a_1 = \sqrt(3)/\pi$ och $a_2 = \sqrt(3)/(2\pi)$. Svaret blir då att det kvadratiska felet blir så litet som möjlig om man väljer $A = 1/3$, $B = \sqrt{3}/\pi$ och $C = \sqrt{3}/(2\pi)$
