Matematiska Institutionen, KTH

5B1209 Signaler och system. I, för E2
Konstrollskrivning nr 2, onsdag 2003-11-26 kl 9.15 - 10.00

Tillåtna hälpmedel: Kursböcker kursmatrial, kursbcker, tabeller, ej egna noteringar.

Namm: Födelsenr:

Uppgifter

1. Givet är differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2 x$$

(a) Finn alla lösnignar $y(x)$ till differentialekvationen. (2p)

En trival lösning: $y(x) = 0$, övriga lösningar :använd separation av variabler:

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx, \text{ integrering ger: } -\frac{1}{y} = x^2 - C$$

Således:

$$y = \frac{1}{C - x^2}$$

(b) För varje lösning $y(x)$ ange det intervall där lösningen är definierad. (Obs. I vissa fall är delas reella axeln upp i flera delintervall med lösningar) (1p)

---

lösningen $y = 0$ definierad för alla x.
När $C < 0$ är lösningen $y(x) = 1/(C - x^2)$ definierad för alla x
När $C = 0$ är den definierad i intervallet $(-\infty, 0)$, i intervallet $(0, \infty)$
När $C > 0$ är den definierad i intervallet $(-\infty, -\sqrt{C})$ och i intervallet $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$ och i intervallet $(\sqrt{C}, \infty)$

(c) Finn den lösning $y(x)$ ovan som uppfyller startvillkoret

$$y(1) = 1.$$

Insättning $1 = y(1) = 1/(C - 1^2)$ ger $C = 2$. Lösningen blir

$$y(x) = \frac{1}{2 - x^2}$$

(1p)

2. Låt funktionen $y(t)$ vara definierad genom

$$y(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{när } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{för övriga } t. \end{cases}$$

(a) Ange generelt en formel för fourier tranformen $Y(f)$ till $y(t)$ där f är frekvensen dvs. $f = \omega/(2\pi)$ där ω är vinkelfrekvensen. (1p)

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \mathrm{e}^{-2\pi j f t} dt$$

(b) Ange funktionen $Y(f)$ för den givna funktionen $y(t)$. (1p)

---

i. Från tabell,

ii. eller genom integrering från av formeln ovan,

iii. eller genom att observera att $y(t$ är faltningen av funktionen $x(t)$ med sig själv, där $x(t)$ är den syckvis konstanta funktionen som är 1 på intervallet $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vilken har sinc-functionen som sin " kända" fouriertransform;

så får vi

$$Y(f) = (\operatorname{sinc}(f))^2 = \frac{\sin^2 \pi f}{\pi^2 f^2} = \frac{1 - \cos 2\pi f}{2\pi^2 f^2}$$

(c) Vad blir värdet av integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(f) df$$

Använd formeln för inverse fouriertransform. Integralen blir

$$= y(0) = 1$$

(1p)

(d) Vad blir värdet av integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$$

Använd parsevals formel. Integralen blir:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{2}{3}$$

(1p)

3. Låt funktien $z(t)$ vara definerad på intervallet $[0, 3]$ genom

$$z(t) = 2 - t$$

Funktionen $z(t)$ utvecklas som en sinusserie.

(a) Hur skrives generellt sinusserien till funktioner på intervallet$[0, 3]$ (1p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi}{3} kt$$

(b) Vad är formeln för att beräkna koefficienterna i denna serie. (1p)

$$b_k = \frac{2}{3} \int_0^3 y(t) \sin \frac{\pi}{3} kt \, dt$$

Vi ska undersöka se närmare på den sinusserie som hör till den givna funktionen $z(t)$ ovan.

(c) För vilka punkter t konvergerar denna serie? (0.5p)

Den konvergerar för alla t.

(d) Denna sinusserie bildar (där den konvergerar) en periodisk funktion. Vad är perioden? (0.5p)

Perioden blir 6.(Sinusfunktionerna ovan är alla udda funktioner så intervallet $[-3, 3)$ motsvararar en period.)

(e) Skissera grafen eller ange på annat sätt värde över en period, av denna periodiska funktion. (1p)

Den periodiska funtionens värde i intervallet $[-3, 3]$ är
0 när $t = -3$
$-(2 - |t|) = -2 - t$ när $-3 < t < 0)$
0 när $t = 0$
$2 - t$ när $0 < t < 3$
0 när $t = 3$

Extra motivering till (c)-(d) (krävdes ej i uppgiften): Dirichlet's villkor för konvergens är uppfyllda.
Sinusfunktionen konvergerar då mot den utvidgade udda periodiska funktionen av $y(t)$ i alla punkter där denna utvidgade funktion är kontinuerlig.
Där den utvidgade funktionen har språng ligger seriens värde mittpunkten i språnget.

Lycka till!