Vem är tomten framme vid tavlan?

- Björn Völcker, S3, tel. 7749, plan 6 i STEX-huset.
- Ska hålla 3 föreläsningar (6, 8 och 10).

Innehåll: *Fouriertransformens praktiska begränsningar* [H 6]

Tillhörande övning 5:

Grupp 1: 10/11, 15-17 i Q31. Tomas Andersson

Grupp 2: 10/11, 15-17 i Q32. Henrik Lundin

Grupp 3: 11/11, 10-12 i Q21. Björn Völcker

Grupp 4: 11/11, 10-12 i Q22. Henrik Lundin

Grupp 5: 11/11, 10-12 i Q23. Tomas Andersson

Varför beräkna Fouriertransformen?

- Se hur en signals energi är fördelad i frekvens istället för i tid.
- Bestämma bandbredd hos en signal.
- Vissa manipulationer är lättare att utföra i frekvensplanet. ("Riktiga" världens viktigaste verktyg.)

Exakt Fouriertransform

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt \ .$$

Det finns två praktiska begränsningar.

1. Ändlig mättid/observationstid.
2. Om beräkningen utförs i dator så måste signalen samplas.

Ändlig observationstid

- Kan bara mäta signalen $y(t)$ under ett begränsat tidsintervall P

$$\hat{Y}_P(f) = \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} y_P(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Om P är för litet så fås en dålig approximation.
  1. Vi missar energi utanför integrationsintervallet.
  2. För dålig frekvensupplösning. Två cosinusar med nästan samma frekvens kan se ut som en cosinus. Tumregel:

$$\text{Frekvensupplösning} = \Delta f \approx \frac{1}{P}$$

Ändlig observationstid (forts.)

- Koppling till Fouriertransform ($y_P(t) = y(t) w_P(t)$)

$$\hat{Y}_P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\mu) W_P(f-\mu) d\mu \quad \{\text{faltning}\}$$

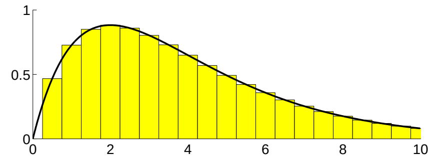
$$w_p(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{P}{2} \\ 0 & \text{annars} \end{cases} , \quad W_P(f) = \frac{\sin(\pi f P)}{\pi f} = P \text{sinc}(\pi f P)$$

- Koppling till Fourierserie. Om $y_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n \frac{t}{P}}$ så gäller

$$c_n = \frac{1}{P} \hat{Y}_P\left(\frac{n}{P}\right)$$

- $\lim_{P\to\infty} \hat{Y}_P(f) = Y(f)$

Numerisk beräkning av FT



- Numerisk approximation av integral ger

$$\hat{Y}_T(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) e^{-j2\pi f nT}$$

- Ett signalbehandlingsperspektiv: Signalen $y(t)$ har samplats med samplingsintervallet T (eller samplingsfrekvensen $f_s = 1/T$).
- $\lim_{T\to 0} \hat{Y}_T(f) = Y(f)$.

Numerisk beräkning av FT (forts.)

Ett par egenskaper/begränsningar.

1. Periodisk: $\hat{Y}_T(f + kf_s) = \hat{Y}_T(f)$.
2. Endast frekvensintervallet $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$ är "rätt", d.v.s. $\hat{Y}_T(f) \approx Y(f)$. Resten ser likadant ut, p.g.a. periodicitet.
3. Är bandbredden hos signalen för stor i förhållande till f_s så kan $\hat{Y}_T(f)$ bli nonsens. [mer i FÖ 10]

- Koppling till tidsdiskret Fouriertransform (TDFT) [Fö 8]

$$\hat{Y}_T(f) = TY_d(fT)$$

- Koppling till DFT (om $y(t)$ är periodisk med periodtid $= P$)

$$Y[k] = \frac{1}{T}\hat{Y}_T\left(\frac{k}{P}\right)$$

Reflexioner

- I praktiken har man *både* ändligt observationsintervall *och* samplade data. [Se nästa övning]
- Tidskontinuerlig FT kan åstadkommas optiskt. [Fö 7]
- Dualitet mellan $y(t)$ och $Y(f)$ + Heissenbergs osäkerhetsrelation:
  1. $\Delta f \cdot P = 1$.
     Man vet $y(t)$ endast under visst tidsintervall $P \Rightarrow$ begränsad upplösning Δf i frekvens.
  2. $\Delta t \cdot f_s = 1$ ($\Delta t = T$).
     Man vet $Y(f)$ endast för visst frekvensintervall $\Rightarrow$ begränsad tidsupplösning (sampling).

Minns du föreläsningen?

- Varför behövs Fouriertransform?
- Vad hos FTn påverkas av ett begränsat observationsintervall?
- Vad hos FTn påverkas av en numerisk beräkning (sampling)?
- Hur länge måste man mäta en signal om man vill uppnå en frekvensupplösning på 0.1 Hz?
- Hur fort måste vi sampla en signal om vi vill kunna beskriva Fouriertransformen för frekvenserna $|f| < 500$ Hz?

Det kommer mer under tidsdiskret Fouriertransform och sampling. [Fö 8–10]