Signaler och system I för E2, ME och IT, 5B1209

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2004–12–18

---

1. a) Differentialekvationen (ekv 1) i texten leder till

$$y' + \frac{1-x}{x}\, y = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \tag{1}$$

Först får vi $\int P(x)\,dx = \int \frac{1-x}{x}\,dx = \ln x - x$ och med detta den integrerande faktorn $h(x) = \mathrm{e}^{\ln x - x} = x\mathrm{e}^{-x}$.
Multiplikation av (1) med denna ger efter förenkling

$$\big(x\mathrm{e}^{-x}\, y\big)' = \frac{\mathrm{e}^x}{x}\, x\,\mathrm{e}^{-x} = 1$$

Härmed fås

$$x\mathrm{e}^{-x}\, y = x + C \Rightarrow y = \mathrm{e}^x + C\,\frac{\mathrm{e}^x}{x} \tag{2}$$

Insättning av begynnelsevärdet $y(1) = 0$ leder snabbt till $C = -1$

$$\boxed{y = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{1}{x}\right),\ x > 0}$$

b) Enligt (2) är differentialekvationens allmänna lösning

$$y = \mathrm{e}^x + C\,\frac{\mathrm{e}^x}{x} \tag{3}$$

För alla C-värden $\neq 0$ är denna lösning odefinierad då $x = 0$.
För C=0 däremot har vi $y = \mathrm{e}^x$, som är definierad för alla x.

$$\boxed{\text{Det finns en lösning definierad för } \textbf{alla } x\text{, nämligen } y = \mathrm{e}^x}$$

---

2. Man har

$$\frac{1}{a^2+t^2} \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{\pi}{a}\,\mathrm{e}^{-a|\omega|} \tag{4}$$

Faltningssatsen ger

$$\frac{1}{a^2+t^2} * \frac{1}{b^2+t^2} \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{\pi}{a}\,\mathrm{e}^{-a|\omega|}\,\frac{\pi}{b}\,\mathrm{e}^{-b|\omega|} = \frac{\pi^2}{ab}\,\mathrm{e}^{-(a+b)|\omega|} \tag{5}$$

Men enligt (4) gäller

$$\mathrm{e}^{-(a+b)|\omega|} \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} \frac{a+b}{(a+b)^2+t^2}\cdot\frac{1}{\pi} \tag{6}$$

Alltså

$$\frac{1}{a^2+t^2} * \frac{1}{b^2+t^2} = \frac{\pi^2}{ab}\cdot\frac{a+b}{(a+b)^2+t^2}\cdot\frac{1}{\pi} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{\pi}{(a+b)^2+t^2} \tag{7}$$

$$\boxed{\text{Den önskade faltningen blir } \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{\pi}{(a+b)^2+t^2}}$$

---

3. a) Egenvärden fås ur

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \implies \lambda_{1,2,3} = -1, -2, -3 \tag{8}$$

som i sin tur leder till egenvektorerna

$$\lambda = -1, \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \implies \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\lambda = -2, \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\lambda = -3, \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

$$\boxed{\mathbf{X}(t) = \mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{B}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{C}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t}}$$

b)

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Matrissambandet (13) ger oss först A = B = C = 1 och med detta blir svaret

$$\boxed{\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t}}$$

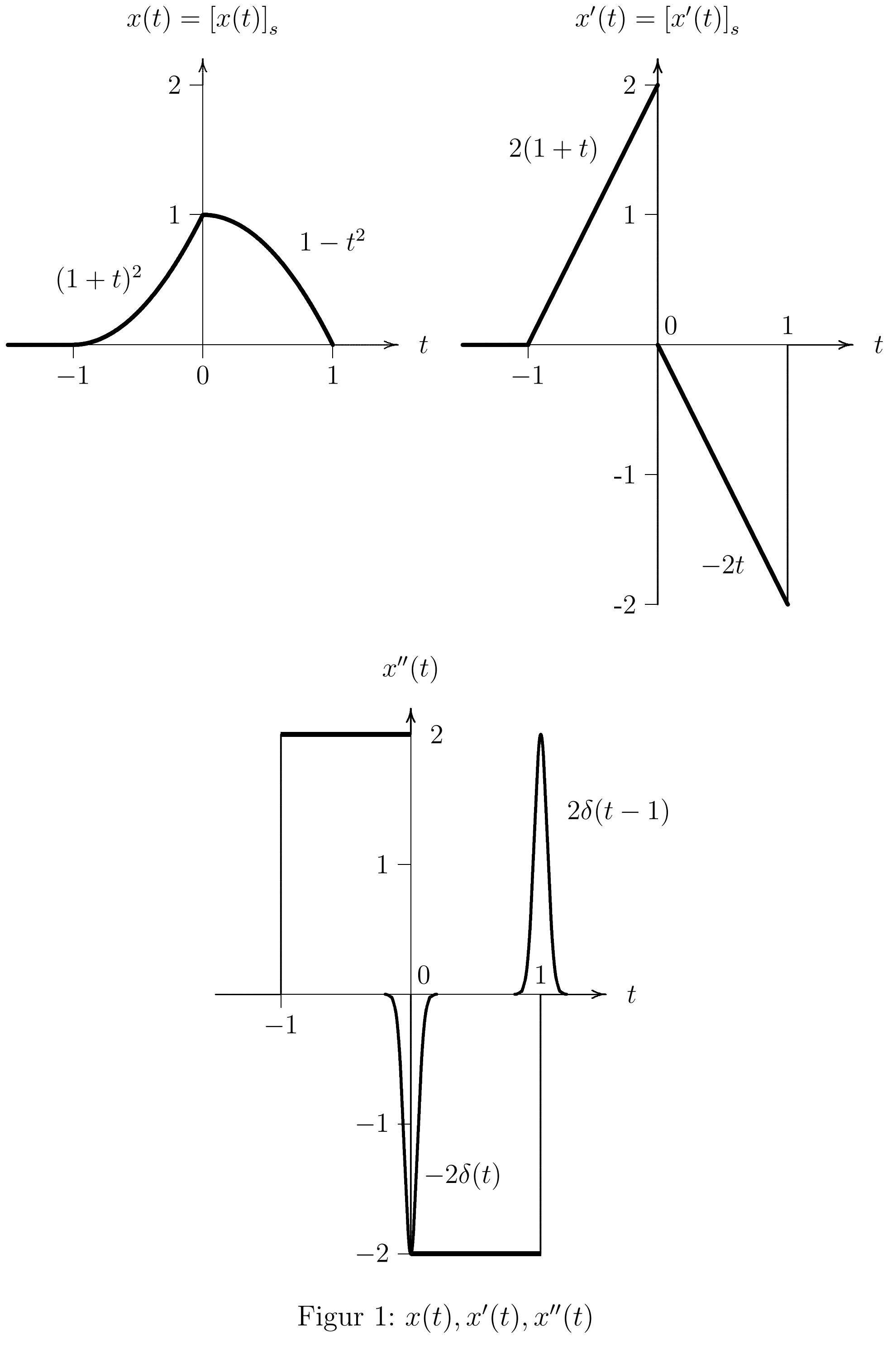
---

4. a) Först skall påpekas att $[x(t)]_s, [x'(t)]_s, [x''(t)]_s$ betyder den styckvis kontinuerliga delen av $x(t), x'(t), x''(t)$, vilket inte innebär något speciellt för våra x och x'. Tittar man däremot på $x''(t)$ ser vi att här tillkommer de s k generaliserade derivatorna i $t = 0$ och $t = 1$.
Resultaten blir alltså, jämför med figur 1,

$$x'(t) = [x'(t)]_s = \begin{cases} -2t, & 0 < t \le 1; \\ 2 + 2t, & -1 \le t \le 0; \\ 0, & 1 < |t|. \end{cases} \tag{14}$$

$$x''(t) = -2\delta(t) + 2\delta(t-1) + [x''(t)]_s = \tag{15}$$

$$= -2\delta(t) + 2\delta(t-1) + \begin{cases} -2, & 0 < t \le 1; \\ 2, & -1 \le t \le 0; \\ 0, & 1 < |t|. \end{cases} \tag{16}$$



Figur 1: $x(t), x'(t), x''(t)$

b) Vi börjar med Fourier-integralen

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \mathrm{e}^{j\omega t} d\omega \tag{17}$$

och deriverar 2 ggr m a p t och får, se även Beta t ex ,

$$\widehat{x''(t)}(j\omega) = (j\omega)^2 X(j\omega) \tag{18}$$

Transformerar vi $x''(t)$ enligt ekv(16) så ger oss ekv(18), efter division med $(j\omega)^2$, den sökta transformen $X(j\omega)$ av $x(t)$.
Rent formellt och utan krav på elegans studerar vi

$$\begin{aligned}
\widehat{x''(t)}(j\omega) &= \int_{-1}^{1} x''(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} dt \\
&= 2 \int_{0}^{1} (-2)(-j) \sin(\omega t) dt + 2 \int_{-\varepsilon}^{1+\varepsilon} (-\delta(t) + \delta(t-1)) \mathrm{e}^{-j\omega t} dt \quad (19) \\
&= \frac{4j}{\omega}(1 - \cos\omega) - 2 \cdot 1 + 2\mathrm{e}^{-j\omega} = (j\omega)^2 X(j\omega),\ \omega \neq 0 \quad (20)
\end{aligned}$$

där vi utnyttjade funktionens udda symmetri i första integralen av ekv(19), samt ekv(18) i sista ledet av ekv(20).
För $\omega = 0$ beräknar vi

$$X(0) = \int_{-1}^{0} (1+t)^2 dt + \int_{0}^{1} 1 - t^2 dt = \cdots = 1 \tag{21}$$

som leder till svaret

$$\boxed{X(j\omega) = -\frac{2}{\omega^2} \left(\frac{2j}{\omega}(1 - \cos\omega) - 1 + \mathrm{e}^{-j\omega} \right),\ \omega \neq 0,\ X(0) = 1}$$

---

5. a) Enligt definition gäller att

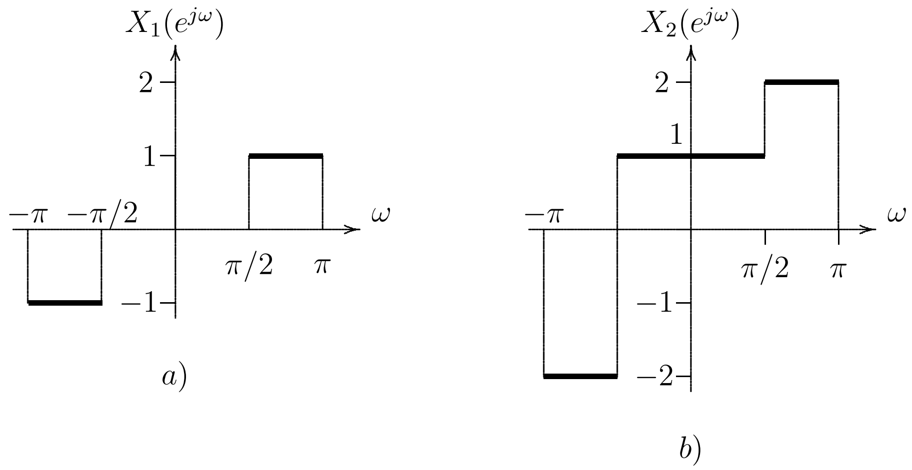
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right) \mathrm{e}^{jn\omega}\, d\omega \tag{22}$$

som i vårt fall, se figur 2:a), innebär integrationen

$$x_1[n] = \frac{2}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 1\, j \sin(n\omega)\, d\omega = \ldots = \frac{j}{n\pi} \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^n \right), n \neq 0 \tag{23}$$

Observera 'j' i svaret, ty $X_1(e^{j\omega})$ är ju udda!! För $n = 0$ fås uppenbart $x_1[0] = 0$

$$\boxed{x_1[n] = \frac{j}{n\pi} \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^n \right), n \neq 0,\ x_1[0] = 0}$$



Figur 2: a) $X_1(e^{j\omega})$, b) $X_2(e^{j\omega})$

b) Till skillnad med a) är här våra sidolådor 2 enheter höga och dessutom har vi en extra, positiv låda i mitten. Vi kan alltså ta resultatet från a) med ändrad höjd och endast beräkna mittenlådans reella inverstransform,

$$x_0[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cos(n\omega)\, d\omega = \ldots = \frac{1}{n\pi}\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right), n \neq 0 \tag{24}$$

För $n = 0$ fås snabbt $x_0[0] = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{x_2[n] = \frac{2j}{n\pi}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^n\right) + \frac{1}{n\pi}\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right), n \neq 0,\ x_2[0] = \frac{1}{2}}$$

---

6. De omnämnda trigonometriska förenklingar syftar på att man först multiplicerar ihop faktorerna och därefter, inte nödvändigtvis, omformar termerna så att endast rena tidsfunktioner återstår i respektive argument, alltså:

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\cos\left(13\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi t)\cos\left(13\pi t + \frac{\pi}{2}\right) && (25)\\ &= -3\sin(13\pi t) + \frac{1}{2}\cos(14\pi t) + \frac{1}{2}\cos(12\pi t + \pi) && (26)\\ &= -3\sin(13\pi t) + \frac{1}{2}\cos(14\pi t) - \frac{1}{2}\cos(12\pi t) && (27) \end{aligned}$$

Eftersom vi samplar med $f_s = 10$Hz blir rekonstruktionfiltrets bandbredd $B = 5$Hz. Med $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ i sambandet $|\pm f_{1,2,3} + mf_s| \leqq B$ blir de aktuella villkoren:

$$\begin{aligned} |\pm 7,0 + m10| &\leqq 5, \implies m = \mp 1 \implies f_a = \mp 3,0Hz\\ |\pm 6,5 + m10| &\leqq 5, \implies m = \mp 1 \implies f_b = \mp 3,5Hz\\ |\pm 6,0 + m10| &\leqq 5, \implies m = \mp 1 \implies f_c = \mp 4,0Hz \end{aligned}$$

Vi får härmed resultatet

$$\boxed{f_a = 3\,\text{Hz}, f_b = 3,5\,\text{Hz}, f_c = 4\,\text{Hz}.}$$

för de utgående frekvenserna.
