Signaler och system I för E2, 5B1209

LÖSNINGSFÖRSLAG till Kontrollskrivning 2004–11–15

1) Lösning

a) Användning av $\int_0^4 |\Phi_i|^2 \, dx = 1, \quad i = 1, 2$ ger snabbt

$$\boxed{A = B = \frac{1}{2}}$$

b) ansätt $f_1 = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2$ och använd att $\Phi_1 \perp \Phi_2$, då blir $c_1 = c_2 = \pm 2$,
p s s $\quad f_2 = d_1\Phi_1 + d_2\Phi_2 \Rightarrow d_1 = \pm\frac{2}{4}, \quad d_2 = \mp\frac{10}{4}$

$$\boxed{f_1(x) = \pm\, 2\,(\Phi_1(x) + \Phi_2(x)) \quad \text{och} \quad f_2(x) = \pm\,\frac{1}{2}\,(\Phi_1(x) \mp\, 5\,\Phi_2(x))}$$

2) Lösning

a) Den absolut enklaste metoden är att tillsammans med ledningen och sambandet $2\cos^2 x = 2\left(\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4}\left(2 + e^{j2x} + e^{-j2x}\right) = 1 + \cos 2x$ dela upp $\cos^2 x$ och $\cos^3 x$ i sina deltoner, då får vi

$$f(x) = 1 + \cos x + (1 + \cos 2x) + \frac{3}{4}\,(\cos 3x + 3\cos x)$$

som också är den sökta fourierserien

$$\boxed{f(x) = 2 + \frac{13}{4}\cos x + \cos 2x + \frac{3}{4}\cos 3x}$$

Kommentar: Skulle man beräkna Fourier-koefficienterna på sedvanligt sätt får man naturligtvis att $a_n \equiv 0$ för alla $n \geq 4$.

b) Studera $\varepsilon_3 = \frac{1}{2\pi}\|f - f_3\|^2$ som i det aktuella fallet blir minimal då de 3 första koefficienterna i f_3 är just lika med de 3 första Fourierkoefficienterna från a) ovan. Det ger oss då

$$\varepsilon_{3,\min} = \frac{1}{2\pi}\|f - f_3\|^2_{\min} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}\cos 3x\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{9}{16}\right)2\pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{32}$$

$$\boxed{\varepsilon_{3,\min} = \frac{9}{32}}$$