Signaler och system I för E2, 5B1209

LÖSNINGSFÖRSLAG till Kontrollskrivning 2, 2004–12–06

1) Lösning

Inversionsformeln ger

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\omega-4|\omega|}\mathrm{e}^{j\omega t}\,d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{j2\omega+4\omega+j\omega t}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\omega-4\omega+j\omega t}\,d\omega = \cdots = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-0}{2j+4+jt} + \frac{0-1}{2j-4+jt}\right] = \frac{4}{\pi\,(16+(t+2)^2)} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{4}{\pi\,(4^2+(t+2)^2)}}$$

2) Lösning

Eftersom $2f_{\max} > f_s = 5000\text{Hz}$ så förväntar vi oss vikningsdistorsion och att 2500 Hz är den maximala frekvens som entydig kan representeras av den samplade signalen $x(nT)$.

a) Vi får

$$y(n) = x(nT) = 3\cos\left(2\pi\,\frac{1}{5}\,n\right) + 5\sin\left(2\pi\,\frac{3}{5}\,n\right) + 10\cos\left(2\pi\,\frac{6}{5}\,n\right) \qquad (1)$$

Vi observerar att de 2 sista normerade frekvenserna i ekv(1), $\nu = \frac{3}{5}$ respektive $\nu = \frac{6}{5}$, ligger utanför vårt område $|\nu| \le \frac{1}{2}$ vilket innebär att vi måste kompensera med -1, m a o -2π, i båda fallen för att hamna innanför $\pm\frac{1}{2}$. Detta leder till

$$\begin{aligned} y(n) &= 3\cos\left(2\pi\frac{1}{5}\,n\right) + 5\sin\left(2\pi(\frac{3}{5}-1)\,n\right) + 10\cos\left(2\pi(\frac{6}{5}-1)\,n\right) \\ &= 3\cos\left(2\pi\frac{1}{5}\,n\right) + 5\sin\left(2\pi(-\frac{2}{5})\,n\right) + 10\cos\left(2\pi\frac{1}{5}\,n\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{y(n) = 13\cos\left(2\pi\frac{1}{5}\,n\right) - 5\sin\left(2\pi\frac{2}{5}\,n\right)}$$

b) Eftersom de enda kvarvarande frekvenserna är 1000 och 2000 Hz blir den rekonstruerade signalen

$$\boxed{z(t) = 13\cos(2\pi 1000t) - 5\sin(2\pi 2000t)}$$

En påtaglig skillnad med den ursprungliga signalen $x(t)$.
