På dagens agenda

- Tidsdiskret Fouriertransform (TDFT) [H 5, OW 5]
- Ett exempel där Fouriertransform används.

Tillhörande övning 6:

Grupp 1: 12/11, 10-12 i L41. Niklas Wernersson

Grupp 2: 12/11, 10-12 i L42. Svante Bergman

Grupp 3: 15/11, 10-12 i K51. Niklas Wernersson

Grupp 4: 15/11, 10-12 i K53. Svante Bergman

Tidsdiskret Fouriertransform...

...är Fouriertransformen av en tidsdiskret signal $x[n]$.

Definition:

$$X_d(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi\nu n} = \mathcal{F}_d\{x[n]\} = \mathrm{TDFT}\{x[n]\}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Inverstransform:

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_d(\nu)e^{j2\pi\nu n}d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Var kommer detta ifrån?

TDFT (forts.)

- Kan härledas från Fourierserier genom att låta perioden gå mot oändligheten. [OW]
- Kan härledas från basfunktionsutvecklingar. [H]
- TDFTn existerar om signalen har ändlig energi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

eller är *absolutsummerbar*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty\ .$$

- Tillåts Diracfunktioner $\delta(\nu)$ så kan TDFTn av specialfall som $x[n] = 1$ beskrivas.

Några egenskaper [OW 5.3–5]

Periodisk: $X_d(\nu+1) = X_d(\nu)$

Faltning i tid ger multiplikation i frekvens.

$$z[n] = x[n] * y[n] \qquad Z_d(\nu) = X_d(\nu)Y_d(\nu)$$

Multiplikation i tid ger (cirkulär) faltning i frekvens.

$$z[n] = x[n]y[n] \qquad Z_d(\nu) = X_d(\nu) * Y_d(\nu)$$

Tidsskift:

$$y[n] = x[n-n_0] \qquad Y_d(\nu) = e^{-j2\pi\nu n_0}X_d(\nu)$$

Parsevals formel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\overline{y[n]} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_d(\nu)\overline{Y_d(\nu)}d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\overline{Y(e^{j\omega})}d\omega$$

Koppling till DFT

- Om $x[n]$ är ändlig med längden N så gäller

$$X[k] = X_d\left(\frac{k}{N}\right)$$

- Detta är särskilt användbart i praktiska tillämpningar då $x[n]$ *alltid* är ändlig. DFT kan då användas för att beräkna $X_d(\nu)$.
- DFTn kan effektivt implementeras med FFT (kursen *Digital signalbehandling*).
- Koppling till numerisk beräkning av FT (sampling)

$$\hat{X}_T(f) = T X_d(fT)$$

Vad är ν?

- Tidsdiskret frekvens.
- Dimensionslös.
- Kontinuerlig variabel.
- Om f (i Hz) betecknar antal perioder per sekund så betyder ν antal perioder per sampel. Lättare att vända på det: $1/\nu$ är antal sampel/period. Vilken är det största ν vi kan uppnå?
- I fallet med samplade data så har vi en relation till samplingsfrekvensen f_s enligt $\nu = fT = f/f_s$. [Mer i FÖ 9–10]
- Ovanstående är också anledningen till att man vill skilja på ω i diskret respektive kontinuerlig tid (vilket mycket sällan görs i litteraturen).

En applikation på Fouriertransform

Bildkompression

Problem: Vill spara en bild, men det krävs för mycket minne om jag ska spara alla pixlar. Hur kan jag minska storleken?

Alternativ 1: Jag sparar bara en del pixlar och försöker återskapa de bortplockade när jag vill se bilden igen. (I tidsdomän.)

Alternativ 2: Jag beräknar DFTn $X[k]$, men sparar bara de komponenter som är störst (har störst energi). Vill jag se bilden så kan jag inverstransformera. (I frekvensdomän.)

JPEG gör ungefär som alternativ 2.

Minns du föreläsningarna?

- Eftersom $X_d(\nu)$ är periodisk så räcker det att man känner till TDFTn i ett visst frekvensintervall. Vilket?
- Vilken enhet har ν?
- Vilken tidsdiskret frekvens har signalen $x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n)$?
- Hur länge måste man mäta en signal om man vill uppnå en frekvensupplösning på 0.01 Hz?
- Hur fort måste vi sampla en signal om vi vill kunna beskriva Fouriertransformen (utan alias) för frekvenserna $|f| < 0.5$ Hz?

Det kommer mer när sampling gås igenom. [Fö 9–10]