Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2002-10-04, kl. 14.15–16.00.

5B1210 Matematik IV, för M och B.

Kontrollskrivning 2!

1. Lös differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-2y}\cos x.$$

Av vilken ordning är differentialekvationen? Är den linjär? Finn även den lösning som har begynnelsevärde $y(0) = 0$, och beskriv var denna är definierad. (5)

Ekvationen är olinjär och av första ordningen.

Vi skriver den som

$$e^{2y}\,dy = e^{x}\cos x\,dx,$$

och integrerar på båda sidor:

$$\int e^{2y}\,dy = \int e^{x}\cos x\,dx.$$

Resultatet av detta blir, om vi multiplicerar båda sidor med 2,

$$e^{2y} = e^{x}\big[\cos x + \sin x\big] + C,$$

där C är en konstant. Logaritmerar vi bägge sidor blir lösningen

$$y = \frac{1}{2}\log\Big\{e^{x}\big[\cos x + \sin x\big] + C\Big\}.$$

Men för att denna lösning skall finnas som en reellvärd funktion krävs att det som skall logaritmeras måste vara positivt, vilket vi kommer att använda strax. Vi stoppar in begynnelsevärdet $(x, y) = (0, 0)$:

$$e^{0} = e^{0}\big[\cos 0 + \sin 0\big] + C,$$

vilket leder till att $C = 0$. Den lösning som sökes är alltså

$$y = \frac{1}{2}\log\Big\{e^{x}\big[\cos x + \sin x\big]\Big\} = \frac{1}{2}\Big(x + \log\big[\cos x + \sin x\big]\Big).$$

Den är väldefinierad så länge som

$$\sqrt{2}\sin\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big) = \cos x + \sin x > 0,$$

det vill säga på intervallet

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}.$$

2. Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 5y = \cos x.$$

Är ekvationen linjär? Homogen? Finn även den lösning som börjar i $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 0$. (5)

Ekvationen är linjär men ej homogen.

Den karakeristiska ekvationen är

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

som har rötterna

$$\lambda = 2 \pm i.$$

Detta ger den allmänna lösningen till det homogena problemet $y'' - 4y' + 5y = 0$ på formen

$$y_h = C_1\, e^{2x} \cos x + C_2\, e^{2x} \sin x.$$

Vi behöver nu bara hitta en partikulärlösning; vi gissar på $y = A\cos x + B \sin x$, där A, B är konstanter. Då blir således

$$y'' - 4y' + 5y = \big[-A\cos x - B\sin x\big] - 4\big[-A\sin x + B\cos x\big] + 5\big[A\cos x + B\sin x\big],$$

och sätter vi detta lika med $\cos x$ finner vi att

$$A = \frac{1}{8}, \qquad B = -\frac{1}{8}.$$

Detta ger partikulärlösningen

$$y_p = \frac{1}{8}\big[\cos x - \sin x\big]$$

och vi finner att den generella lösningen till den givna ekvationen är

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{8}\big[\cos x - \sin x\big] + C_1\, e^{2x} \cos x + C_2\, e^{2x} \sin x.$$

Då blir derivatan

$$y' = \frac{1}{8}\big[-\sin x - \cos x\big] + \big[2C_1 + C_2\big]\, e^{2x} \cos x + \big[-C_1 + 2C_2\big]\, e^{2x} \sin x.$$

As we plug in the conditions $y(\pi) = y'(\pi) = 0$, we get

$$y(\pi) = -\frac{1}{8} - C_1\, e^{2\pi} = 0, \qquad y'(\pi) = \frac{1}{8} - (2C_1 + C_2)e^{2\pi} = 0,$$

with solution

$$C_1 = -\frac{1}{8}\, e^{-2\pi}, \qquad C_2 = \frac{3}{8}\, e^{-2\pi}.$$

Slutligen får vi så lösningen till begynnelsevärdesproblemet:

$$y = \frac{1}{8}\big[\cos x - \sin x\big] - \frac{1}{8}\, e^{-2\pi}\, e^{2x} \cos x + \frac{3}{8}\, e^{-2\pi}\, e^{2x} \sin x.$$

3. Vilken funktion har Laplace-tranformen

$$\frac{s^2}{(s+2)(s^2+4)} \quad ?$$

(5)

Här var det meningen att man skulle använda partialbråksuppdelning, för att få fram rätt funktion. Men i detta fall räcker det uppenbarligen att konsultera BETA (s. 328): Funktionen är

$$\frac{1}{8}\Big(4e^{-2t} - 4\sin(2t) + 4\cos(2t)\Big),$$

vilket uttryck kan förenklas något.