Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2002-10-04, kl. 14.15–16.00.

5B1210 Matematik IV, för M och B.

Kontrollskrivning 2!

1. Lös differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-2y} \cos x.$$

Av vilken ordning är differentialekvationen? Är den linjär? Finn även den lösning som har begynnelsevärde $y(0) = 1$, och beskriv var denna är definierad. (5)

Ekvationen är olinjär och av första ordningen.

Vi skriver den som

$$e^{2y}\, dy = e^x \cos x\, dx,$$

och integrerar på båda sidor:

$$\int e^{2y}\, dy = \int e^x \cos x\, dx.$$

Resultatet av detta blir, om vi multiplicerar båda sidor med 2,

$$e^{2y} = e^x \big[\cos x + \sin x\big] + C,$$

där C är en konstant. Logaritmerar vi bägge sidor blir lösningen

$$y = \frac{1}{2} \log\Big\{e^x \big[\cos x + \sin x\big] + C\Big\}.$$

Men för att denna lösning skall finnas som en reellvärd funktion krävs att det som skall logaritmeras måste vara positivt, vilket vi kommer att använda strax. Vi stoppar in begynnelsevärdet $(x, y) = (0, 1)$:

$$e^2 = e^0 \big[\cos 0 + \sin 0\big] + C,$$

vilket leder till att $C = e^2 - 1$. Den lösning som sökes är alltså

$$y = \frac{1}{2} \log\Big\{e^x \big[\cos x + \sin x\big] + e^2 - 1\Big\}.$$

Den är väldefinierad så länge som

$$e^x \big[\cos x + \sin x\big] + e^2 - 1 > 0.$$

Denna olikhet definierar ett maximalt stort intervall runt $x = 0$, och detta blir alltså den mängd på vilken lösningen blir definierad.

2. Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 5y = \cos x.$$

Är ekvationen linjär? Homogen? Finn även den lösning som börjar i $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (5)

Ekvationen är linjär men ej homogen.

Den karakeristiska ekvationen är

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

som har rötterna

$$\lambda = 2 \pm i.$$

Detta ger den allmänna lösningen till det homogena problemet $y'' - 4y' + 5y = 0$ på formen

$$y_h = C_1\, e^{2x} \cos x + C_2\, e^{2x} \sin x.$$

Vi behöver nu bara hitta en partikulärlösning; vi gissar på $y = A\cos x + B\sin x$, där A, B är konstanter. Då blir således

$$y'' - 4y' + 5y = \big[-A\cos x - B\sin x\big] - 4\big[-A\sin x + B\cos x\big] + 5\big[A\cos x + B\sin x\big],$$

och sätter vi detta lika med $\cos x$ finner vi att

$$A = \frac{1}{8}, \qquad B = -\frac{1}{8}.$$

Detta ger partikulärlösningen

$$y_p = \frac{1}{8}\big[\cos x - \sin x\big]$$

och vi finner att den generella lösningen till den givna ekvationen är

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{8}\big[\cos x - \sin x\big] + C_1\, e^{2x} \cos x + C_2\, e^{2x} \sin x.$$

Då blir derivatan

$$y' = \frac{1}{8}\big[-\sin x - \cos x\big] + \big[2C_1 + C_2\big]\, e^{2x} \cos x + \big[-C_1 + 2C_2\big]\, e^{2x} \sin x.$$

As we plug in the conditions $y(0) = 1$ and $y'(0) = 0$, we get

$$y(0) = \frac{1}{8} + C_1 = 1, \qquad y'(0) = -\frac{1}{8} + (2C_1 + C_2) = 0,$$

with solution

$$C_1 = \frac{7}{8}, \qquad C_2 = -\frac{13}{8}.$$

Slutligen får vi så lösningen till begynnelsevärdesproblemet:

$$y = \frac{1}{8}\big[\cos x - \sin x\big] + \frac{7}{8}\, e^{2x} \cos x - \frac{13}{8}\, e^{2x} \sin x.$$

3. Vilken funktion har Laplace-transformen

$$\frac{s}{(s+3)(s^2+9)} \quad ?$$

(5)

Här var det meningen att man skulle använda partialbråksuppdelning, för att få fram rätt funktion. Men i detta fall räcker det uppenbarligen att konsultera BETA (s. 328): Funktionen är

$$\frac{1}{18}\Big(-3\,e^{-3t} + 3\,\sin(3t) + 3\,\cos(3t)\Big),$$

vilket kan förenklas något.