Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2003-09-19, kl. 15.15–16.00.

5B1210 Matematik IV, för M och B.

Kontrollskrivning 1!

1. (MODUL 4) Lös differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2}\,(1+y^2)\cos x.$$

Av vilken ordning är differentialekvationen? Är den linjär? Finn även den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$, samt förklara var denna är definierad.

---

Ekvationen är olinjär av första ordningen. Den är dessutom variabel-separerad, varför vi skriver

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}\cos x\,dx.$$

Vi integrerar båda sidor, för att erhålla

$$\arctan y = \frac{\pi}{2}\sin x + C,$$

där $C$ är en konstant. Om nu $y(0) = 0$, så måste $C = 0$, eftersom $\arctan 0 = 0$ och $\sin 0 = 0$. Vi finner således:

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right).$$

Vi ska nu resonera om hur långt denna lösning sträcker sig. Vi noterar att tangensfunktionen har singulariteter i punkterna $\frac{1}{2}\pi + n\pi$, där $n$ är ett heltal, och $|\sin x| \leq 1$, med likhet i ex vis $x = -\frac{1}{2}\pi$ och $x = \frac{1}{2}\pi$, och strikt olikhet för $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$. Det följer av detta samt välkända egenskaper hos tan och sin att

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$$

går mot $+\infty$ då $x \to \frac{1}{2}\pi^-$, och mot $-\infty$ då $x \to -\frac{1}{2}\pi^+$. Vi ser att lösningen är väldefinierad på $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, men att den inte låter sig utvidgas till något större intervall.