Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2003-10-06, kl. 15.15–18.00.

5B1202 Matematik IV, för BM.

kontrollskrivning MODUL 5

1. (MODUL 5) Funktionen

$$y_1 = x^{-5},$$

löser differentialekvationen

$$x^2\, y'' + 4\, x\, y' - 10\, y = 0, \qquad x > 0.$$

Bestäm en av y_1 linjärt oberoende lösning till differentialekvationen. Visa att lösningarna är linjärt oberoende.

Ekvationen är linjär, homogen, av andra ordningen, och en lösning är given. Det är då naturligt att använda metoden med *reduktion av ordning*. Därvid ansätts $y_2 = y_1 u$, och man stoppar in detta uttryck istället för y i differentialekvationen. Man finner, efter lite räknande, att

$$u'' - 6\, \frac{u'}{x} = 0,$$

och vi inför funktionen $v = u'$. Ovanstående ekvation blir då

$$v' - 6\, \frac{v}{x} = 0,$$

vilken ekvation är av första ordningen, linjär, och homogen. Denna löses med hjälp av integrerande faktor, och man finner den allmänna lösningen

$$v = C_1\, x^6,$$

vilket motsvarar

$$u = C_2\, x^7 + C_3.$$

Eftersom vi söker en enda ytterligare lösning, kan vi vÏja $C_2 = 1$ och $C_3 = 0$. Detta ger

$$y_2 = y_1 u = x^2.$$

Att vi får en linjärt oberoende lösning kan verifieras på många sätt. Ex vis kan vi betrakta ekvationen

$$\alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x) = 0,$$

där α_1, α_2 är skalärer, och stoppa in två olika värden på x, och dra slutsatsen att $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Ett annat sätt är att visa att Wronskianen är nollskild.