Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2003-10-06, kl. 15.15–18.00.

5B1202 Matematik IV, för BM.

Kontrollskrivning MODUL 6

1. (MODUL 6) Betrakta systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \mu\, y. \end{cases}$$

Bedöm hur stabiliteten i systemet (kring origo) beror av parametern $\mu$. Rita fasdiagram för att förklara hur "partikelflödet" utvecklas i tiden. Dessutom, för det speciella fallet $\mu = 0$, lös ekvationen explicit, och rita upp lösningskurvan med $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

---

Ekvationen är linjär. Motvarande matris är

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},$$

vilken har spåret $\tau = \mu$ och determinanten $\Delta = 2$. Egenvärdena blir således

$$\lambda = \frac{\tau}{2} \pm \sqrt{\frac{\tau^2}{4} - \Delta} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 2}.$$

Om $-\sqrt{8} < \mu < \sqrt{8}$ får vi komplexa (icke-reella) rötter, medan för $|\mu| \geq \sqrt{8}$ blir det reella rötter.

**Fall 1:** $-\sqrt{8} < \mu < \sqrt{8}$. Realdelen besäms av $\mu$, och vi finner att vi får asymptotisk stabilitet om $\mu < 0$, medan vi har instabilitet om $\mu > 0$. I båda dessa fall blir fasdiagrammet en spiral [ritas ej här]. För $\mu = 0$ får vi bara stabilitet, och vi får ett centrum.

**Fall 2:** $|\mu| \geq \sqrt{8}$. Om $\mu > \sqrt{8}$, blir båda egenvärdena positiva, och vi får en instabil nod. Om istället $\mu < -\sqrt{8}$, blir båda egenvärdena negativa, och vi får en asymptotiskt stabil nod. Om $\mu = \sqrt{8}$, så ser vi att vi det dubbla egenvärdet $\lambda = \sqrt{2}$ bara har en enda egenvektor, vilket innebär att vi har en instabil degenererad nod. På samma vis finner vi för $\mu = -\sqrt{8}$ att vi får en asymptotiskt stabil degenererad nod.

Vi betraktar nu specialfallet $\mu = 0$, varvid $\lambda_1 = i\sqrt{2}$ och $\lambda_1 = -i\sqrt{2}$ är egenvärdena.

Motsvarande egenvektorer är

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix}.$$

Vi delar upp $\mathbf{K}_1$:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1 + i\,\mathbf{B}_2.$$

Vi får så lösningarna

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{B}_1 \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \mathbf{B}_2 \sin\left(\sqrt{2}t\right), \qquad \mathbf{X}_2 = \mathbf{B}_2 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + \mathbf{B}_1 \sin\left(\sqrt{2}t\right),$$

vilka vi nu skriver ut explicit

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) \\ \sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right) \\ -\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen blir

$$\mathbf{X} = c_1\,\mathbf{X}_1 + c_2\,\mathbf{X},$$

och lösningen med de angivna begynnelsevärdena är motsvarar $c_1 = 1/\sqrt{2}$, $c_2 = 0$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2}t\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

Denna skall sedan ritas: det blir en ellips längs vilken tidsriktningen går i positiv led.