Institutionen för matematik
KTH

Kontrollskrivning, 2003-10-13, kl. 13.15–15.00.

5B1202 Matematik IV, för BM.

Kontrollskrivning MODUL 7

1. (MODUL 7) Beräkna Fourierserien till funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0, \\ 1, & 0 < t < \dfrac{\pi}{2}, \\ 3, & \dfrac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

Rita sedan grafen till Fourierserien på intervallet $[-2\pi, 4\pi]$.

Lösningsskiss: Grafen är samma som för $f(t)$, bara gjord periodisk med period 2π. Av tekniska skäl ritar vi den inte här.

Fourierserien till funktionen är

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big\{ a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big\},$$

där koefficienterna a_n och b_n ges av

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \cos(nt)\, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \sin(nt)\, dt.$$

Vi räknar på, för $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \Big\{ \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} \Big\} = 0 + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \cos(nt)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 3\, \cos(nt)\, dt$$

$$= \left[\frac{\sin(nt)}{\pi n} \right]_0^{\pi/2} + 3 \left[\frac{\sin(nt)}{\pi n} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\sin(n\pi/2)}{\pi n} + 0 - 3\, \frac{\sin(n\pi/2)}{\pi n} = -2\, \frac{\sin(n\pi/2)}{\pi n},$$

medan för $n = 0$ blir det på samma vis

$$a_0 = 0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 3\, dt = 2.$$

Analogt räknar vi ut koefficienterna b_n [vi skriver inte lösningen här av utrymmesskäl].

Slutligen observerar vi att $\sin(n\pi/2)$ är 0 om n är ett jämnt heltal, 1 om $n = 1 + 4k$, med k ett heltal, samt -1 om $n = 3 + 4k$. Med denna information tillika kalkylen av b_n är det enkelt att skriva upp summan som ger Fourierserien.