Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2003-01-09, kl. 14.00–19.00.

5B1210 och 5B1230 Matematik IV, för B, M, och I.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs 17 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Bestäm, på explicit form, den lösning till differentialekvationen

$$\frac{y'}{\cos x} + y = 2e^{\sin x}$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 3$. (4)

Vi skriver om differentialekvation som

$$y' + (\cos x)\, y = 2e^{\sin x} \cos x.$$

Multiplikation med integrerande faktor $e^{\sin x}$ ger

$$e^{\sin x}\, y' + e^{\sin x}(\cos x)\, y = 2\, e^{2\sin x} \cos x,$$

det vill säga

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\sin x}\, y\right) = 2\, e^{2\sin x} \cos x.$$

Denna ekvation har den allmänna lösningen

$$e^{\sin x} y = e^{2\sin x} + C,$$

eller, med andra ord,

$$y = e^{\sin x} + C\, e^{-\sin x}.$$

Begynnelsevillkoret

$$y(0) = 1 + C = 3$$

ger $c = 2$, dvs

$$y = e^{\sin x} + 2\, e^{-\sin x},$$

vilket utgör den sökta lösningen.

V.g. vänd!

2. Öl som innehåller 6% alkohol (vi räknar volymsprocent) pumpas in i en tank, vilken innehåller 400 liter öl med alkoholhalten 3%. Ölet pumpas in med 3 liter per minut, och den välblandade vätskan pumpas ut med 4 liter per minut. Bestäm alkoholhalten i tanken efter 100 minuter. När är tanken tom? (4)

Låt $x(t)$ beteckna volymen ren alkohol i tanken vid tiden t (t mäts i minuter), uttryckt i liter; speciellt gäller då i början $x(0) = 12$. Vid tiden t är den totala mängden vätska i tanken $400 - t$, så länge som $0 \leq t \leq 400$; speciellt är tanken to efter 400 minuter. Detta betyder att alkoholkoncentrationen i tanken uttrycks av

$$\frac{x(t)}{400 - t}.$$

Man får ur den givna informationen fram differentialekvationen

$$x'(t) = 3 \cdot \frac{6}{100} - 4\,\frac{x(t)}{400 - t}, \qquad 0 \leq t < 400.$$

Denna skrivs på standardform:

$$x'(t) + \frac{4}{400 - t}\,x(t) = 0.18.$$

Den integrerande faktorn blir

$$e^{-4\ln(400-t)} = (400 - t)^{-4}.$$

Vår differentialekvation skrivs först om på formen

$$(400 - t)^{-4}x'(t) + (400 - t)^{-5}\,4\,x(t) = 0.18\,(400 - t)^{-4},$$

och sedan på formen

$$\frac{d}{dt}\Big\{(400 - t)^{-4}x(t)\Big\} = 0.18\,(400 - t)^{-4}.$$

Denna ekvation integreras lätt:

$$(400 - t)^{-4}x(t) = 0.18\int(400 - t)^{-4}dt = 0.06\,(400 - t)^{-3} + C,$$

och ger lösningen

$$x(t) = 0.06\,(400 - t) + C\,(400 - t)^4.$$

Om vi sätter in begynnelsedata $x(0) = 12$ erhålles

$$C = -\frac{12}{400^4}.$$

Alkoholhalten vid tiden $t = 100$ är

$$\frac{x(100)}{400 - 100} = \frac{0.06 \cdot 300 - \frac{12}{400^4}\,300^4}{300} \approx 0.047.$$

Svaret är alltså 4.7%, approximativt.

3. Bestäm den funktion $y = y(t)$ som satisfierar differentialekvationen

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = 12\,t^2\,e^{2t}$$

och begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$. (5)

Den homogena differentialekvationen $y'' - 4\,y' + 4\,y = 0$ har karakteristisk ekvation

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

med dubbelroten $\lambda = 2$. Detta ger den allmänna homogena lösningen

$$y_h = A\,e^{2t} + B\,t\,e^{2t},$$

där A, B är konstanter. Vi sätter

$$y_1(t) = e^{2t}, \qquad y_2(t) = t\,e^{2t}.$$

Motsvarande Wronskian är

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2t} & t\,e^{2t} \\ 2\,e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t}\big(2t + 1 - 2t\big) = e^{4t}.$$

Med standardbeteckningar är så

$$R = 12\,t^2\,e^{2t}.$$

Vi använder metoden med variation av parametrar. Således ansätter vi en partikulärlösning till vår inhomogena ekvation på formen $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$. Enligt standardreduktionen får man

$$\begin{cases} v_1' = -\dfrac{y_2 R}{W} = -\dfrac{t\,e^{2t}\,12\,t^2\,e^{2t}}{e^{4t}} = -12\,t^3 \Rightarrow v_1 = -3\,t^4 + C_1 \\ v_2' = \dfrac{y_1 R}{W} = \dfrac{e^{2t}12\,t^2\,e^{2t}}{e^{4t}} = 12\,t^2 \Rightarrow v_2 = 4\,t^3 + C_2. \end{cases}$$

Vi väljer $C_1 = C_2 = 0$, och erhåller

$$y_p = -3\,t^4\,e^{2t} + 4\,t^3 t\,e^{2t} = t^4\,e^{2t}.$$

Den allmänna lösningen blir således

$$y = y_p + y_h = t^4\,e^{2t} + A\,e^{2t} + B\,t\,e^{2t}.$$

Begynnelsedata $y(0) = y'(0) = 1$ ger $A = 1$ och $B = -1$, så att vår sökta lösning blir

$$y = y_p + y_h = t^4\,e^{2t} + e^{2t} - t\,e^{2t}.$$

Det bör noteras att uppgiften även kan lösas med Laplace-transformering.

V.g. vänd!

4. Bestäm allmänna lösningen $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$x^2\, y'' - x\, y' - 3\, y = 4\, x^3$$

på intervallet $x > 0$. En lösning till den motsvarande homogena differentialekvationen är $y_1(x) = x^3$. (5)

Det är givet att $y_1 = x^3$ löser den homogena ekvationen. Eftersom ekvationen är av andra ordningen och icke-singulär på det givna intervallet, kommer lösningsmängden till den homogena ekvationen att spännas upp av två funktioner. Vi använder metoden med reduktion av ordningen, och söker ytterligare en homogen lösning på formen

$$y_2 = v y_1 = x^3 v.$$

En enkel räkning ger

$$y_2' = x^3\, v' + 3x^2\, v \quad \text{och} \quad y_2'' = x^3\, v'' + 6x^2\, v' + 6xv.$$

Insättning i den homogena ekvationen

$$x^2\, y'' - x\, y' - 3\, y = 0$$

ger

$$x^2\big(x^3\, v'' + 6x^2\, v' + 6xv\big) - x\big(x^3\, v' + 3x^2\, v\big) - 3x^3 v = 0,$$

vilket förenklas till

$$x^5\, v'' + 5x^4\, v' = 0.$$

Dena ekvation skriver vi på formen

$$\frac{d}{dx}\big(x^5\, v'\big) = 0,$$

och ser att lösningen är

$$x^5\, v' = C \qquad \text{dvs} \qquad v' = C\, x^{-5}.$$

Vi integrerar, och finner

$$v = A\, x^{-4} + B,$$

med $C = -4A$. Detta ger

$$y_2 = v y_1 = \big(A\, x^{-4} + B\big)\, x^3 = A\, x^{-1} + B\, x^3.$$

Vi kan alltså välja

$$y_2(x) = \frac{1}{x}.$$

Vi tillämpar nu metoden med variation av parametrar, och söker en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen på formen $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$. Vi sätter $R = 4\, x$

(vi delar $4x^3$ med koefficienten framför y''), och beräknar Wronskianen:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & x^{-1} \\ 3\,x^2 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -x - 3x = -4x.$$

Man får

$$\begin{cases} v_1' = -\dfrac{y_2 R}{W} = \dfrac{x^{-1} 4x}{4x} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow v_1 = \ln x + C_1 \\ v_2' = \dfrac{y_1 R}{W} = -\dfrac{x^3\,4x}{4x} = -x^3 \Rightarrow v_2 = -\dfrac{x^4}{4} + C_2. \end{cases}$$

Väljer vi $C_1 = C_2 = 0$, så får vi

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 = x^3 \ln x - \frac{x^3}{4}.$$

Den allmänna lösningen blir således

$$y = y_p + y_h = x^3 \ln x - \frac{x^3}{4} + A\,x^3 + \frac{B}{x}.$$

Detta problem kunde även ha lösts med hjälp av substitutionen $x = e^t$, vilken förvandlar ekvationen till en väsentligt enklare typ av diffenrentialekvation.

V.g. vänd!

5. Sök största möjliga värdet för

$$\int_\Gamma \left(12\,x^2 y + 4\,y^3\right) dx + \left(3x + 4y\right) dy$$

då kurvan Γ får variera över alla enkla slutna (reguljära) kurvor i xy-planet som genomlöpes i positiv led. (5)

Greens formel ger

$$\int_\Gamma \left(12x^2 y + 4y^3\right) dx + \left(3x + 4y\right) dy = \iint_\Omega \left(3 - 12x^2 - 12y^2\right) dxdy,$$

där Ω är området innanför Γ. Dubbelintegralen maximeras om vi integrerar över det område Ω där $3 - 12x^2 - 12y^2 \geq 0$, vilket kan skrivas som

$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Detta är en cirkelskiva med radie $\frac{1}{2}$ runt origo, och motsvarande kurva Γ är cirkeln

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

genomlupen i positiv led. Det maximala värdet på kurvintegralen blir

$$\iint_\Omega \left(3 - 12x^2 - 12y^2\right) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} (3 - 12r^2)\, r\, dr\, d\theta,$$

vilket vi förenklar till

$$2\pi \left[\frac{3r^2}{2} - 3r^4\right]_0^{1/2} = 2\pi \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

Detta är alltså svaret.

6. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \big(x + 2\,y\big)\,dxdy,$$

där D är kvadraten med hörn i punkterna $(3,0)$, $(6,3)$, $(3,6)$, och $(0,3)$. (4)

Vi delar upp kvadraten D i två lika stora delar, D_1 och D_2. På D_1 gäller $x \leq 3$, medan på D_2 gäller $x > 3$. Vi finner att

$$\iint_{D_1} \big(x + 2\,y\big)\,dxdy = \int_0^3 dx \int_{-x+3}^{x+3} (x + 2y)\,dy = \int_0^3 dx \Big[yx + y^2\Big]_{-x+3}^{x+3},$$

och detta förenklas till

$$\int_0^3 \big(12x + 2x^2\big)dx = \Big[6x^2 + \frac{2}{3}\,x^3\Big]_0^3 = 72.$$

Analogt finner vi att

$$\iint_{D_2} \big(x + 2\,y\big)\,dxdy = \int_3^6 dx \int_{x-3}^{-x+9} (x + 2y)\,dy = \int_3^6 dx \Big[yx + y^2\Big]_{x-3}^{-x+9},$$

och detta förenklas till

$$\int_3^6 \big(-2x^2 + 72\big)dx = 90.$$

Svaret är således $72 + 90 = 162$.

Uppgiften kan även lösas genom ett lämpligt koordinatbyte i dubbelintegralen.

7. Bestäm alla kritiska punkter till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 1 + xy, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Bestäm deras typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgör om möjligt huruvida de är stabila eller instabila. (5)

Systemet är

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

där $P(x, y) = 1 + xy$ och $Q(x, y) = x + y$. De kritiska punkterna ges som lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 + xy = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Eftersom $y = -x$, måste $1 - x^2 = 0$, dvs $x = 1$ eller $x = -1$. Vi får två fall.

Fall 1. $x = 1$ och $y = -1$.

Fall 2. $x = -1$ och $y = 1$.

Sätt

$$A = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I fall 1 fås

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Detta är lineariseringsmatrisen för systemet i den givna kritiska punkten. En kalkyl ger att denna har egenvärdena $\sqrt{2}$ och $-\sqrt{2}$, vilket innebär att $(1, -1)$ är en instabil sadelpunkt.

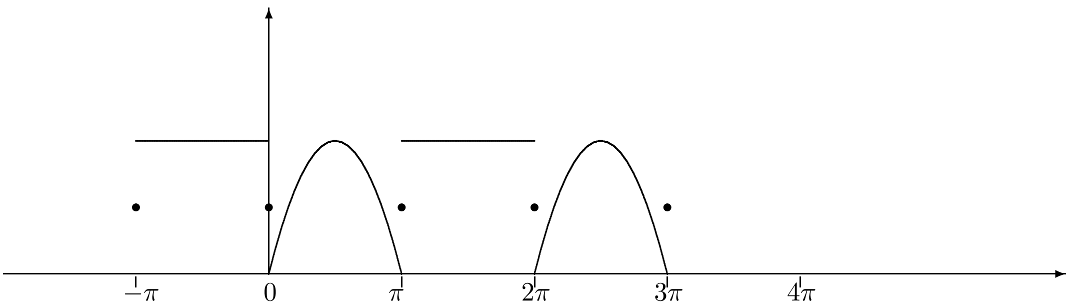
I fall 2 fås istället

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denna matris har egenvärdena $1 + i$ och $1 - i$, vilket innebär att $(-1, 1)$ är en instabil spiralpunkt.

8. Sätt $f(x) = \sin x$ för $0 \leq x \leq \pi$ och $f(x) = 1$ för $-\pi < x < 0$. Beräkna Fourierserien för denna funktion. Rita sedan upp grafen för Fourierserien på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$. (5)

Fourierserien har period 2π. Detta medför enligt känd teori att dess graf ges av



Vi skriver $f(x) = g(x) + h(x)$, där $g(x) = 0$ på intervallet $-\pi < x < 0$, och $g(x) = \sin x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$, och $h(x) = 1$ på intervallet $-\pi < x < 0$, och $h(x) = 0$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Enligt [BETA, s. 310], har $g(x)$ Fourierserie

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}\cos(2nx).$$

Dessutom har funktionen $h(x) - \frac{1}{2}$ Fourierserie [BETA, s. 309]

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n}\sin(nx) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\sin\big((2k-1)x\big).$$

Det följer att $h(x)$ har Fourierserie

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\sin\big((2k-1)x\big).$$

Fourierserien för $f(x)$ är summan av Fourierserien för $g(x)$ och Fourierserien för $h(x)$.