Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning i Matematik IV, 5B1210.
Lördagen den 8 november 2003, kl 0900-1400.

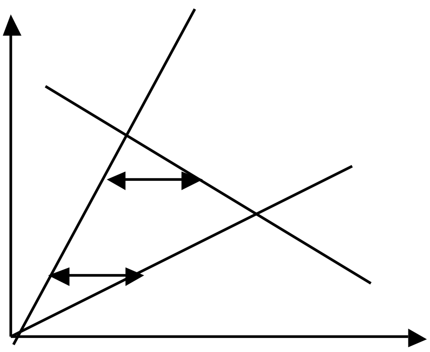
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 3 är avsedd för betyg 3 och omfattar 7 uppgifter.
För godkänt krävs minst 6 moduler godkända.
OBS! GODKÄNDA MODULER TILLGODORÄKNAS ENDAST FRÅN PERIOD 1 2003. OBS!
Detta sker enligt följande:

Uppgift Nr	1	2	3	4	5	6	7
Modul BioK Nr	1	2	3	4	5	6	7
Modul BM Nr	1	2	7	3	4	5	6

Del 3

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y \, dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$ och $(1,2)$.

Lösning:
Vi ritar upp området. Triangeln begränsas av de räta linjerna : $x+y=3$, $y=2x$ och $x=2y$.



Vid integrationen måste området uppdelas i två delområden. Vi börjar med integration med avseende på x.

$$\iint_D y\,dxdy = \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y/2}^{2y} y\,dx\right)dy + \int_{y=1}^{2}\left(\int_{x=y/2}^{3-y} y\,dx\right)dy = \int_{y=0}^{1} y\cdot\frac{3y}{2}\,dy + \int_{y=1}^{2} y\cdot\left(3-\frac{3y}{2}\right)dy$$

$$\iint_D y\,dxdy = \frac{1}{2}\left[y^3\right]_{y=0}^{1} + \left[3\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{2}\right]_{y=1}^{2} = \frac{1}{2}+6-4-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

SVAR: Den sökta dubbelintegralen blir $\frac{3}{2}$.

2. Beräkna linjeintegralen $\int_C \mathbf{grad} f\cdot d\mathbf{r}$, där $f(x,y)=r^4$, $r=|\mathbf{r}|$, $\mathbf{r}=(x,y)$ och C är den räta linjen från punkten $(1,0)$ till punkten $(3,1)$.

Lösning:
Vi utvecklar $\mathbf{grad} f\cdot d\mathbf{r} = \left(f'_x, f'_y\right)\cdot(dx,dy) = f'_x dx + f'_y dy = df$.

Då kan linjeintegralen skrivas $\int_C \mathbf{grad} f\cdot d\mathbf{r} = \int_C df = f(3,1)-f(1,0) = \left(3^2+1^2\right)^2-\left(1^2+0^2\right)^2 = 99$.

SVAR: Linjeintegralen blir 99.

3. Undersök om funktionsföljden $\{1,\ \cos mt,\ \sin nt\}$ där $m=1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots$ och $n=1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots$ är ortogonal på intervallet $(-\pi,\pi)$. Uttryck därefter den 2π-periodiska funktionen f med hjälp av denna funktionsföljd då $f(t)=t^2$, $-\pi<t<\pi$.

Lösning:

Vi undersöker om de inre produkterna blir noll.

$$\langle 1, \cos mt \rangle = \int_{t=-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mt \; dt = \left[\frac{\sin mt}{m}\right]_{t=-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$\langle 1, \sin nt \rangle = \int_{t=-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nt \; dt = \{\text{Udda funktion och origosymmetriskt intervall.}\} = 0.$$

$$\langle \cos mt, \sin nt \rangle = \int_{t=-\pi}^{\pi} \cos mt \cdot \sin nt \; dt = \frac{1}{2}\int_{t=-\pi}^{\pi} \left(\sin(n+m)t + \sin(n-m)t\right) \; dt$$

$$\langle \cos mt, \sin nt \rangle = \{\text{Udda funktioner och origosymmetriskt intervall.}\} = 0.$$

För $m \neq k$ ehålles:

$$\langle \cos mt, \cos kt \rangle = \int_{t=-\pi}^{\pi} \cos mt \cdot \cos kt \; dt = \frac{1}{2}\int_{t=-\pi}^{\pi} \left(\cos(m-k)t + \cos(m+k)t\right) \; dt = \{\text{Analogt med ovan.}\} = 0$$

För $n \neq l$ ehålles:

$$\langle \sin nt, \sin lt \rangle = \int_{t=-\pi}^{\pi} \sin nt \cdot \sin lt \; dt = \frac{1}{2}\int_{t=-\pi}^{\pi} \left(\cos(n-l)t - \cos(n+l)t\right) \; dt = \{\text{Analogt med ovan.}\} = 0$$

Således är den givna funktionsföljden ortogonal på det aktuella intervallet.
Vi uttrycker nu den 2π-periodiska funktionen f med hjälp av den undersökta funktionsföljden.
Detta innebär att funktionens fourierserie bestäms.

Funktionen f är en jämn funktion. Fourierserien är på formen $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$.

Fourierserien finns tabulerad i BETA(4:e upplagan) 13.1 under speciella fourierserier, nr13.

Vi erhåller fourierserien $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$.

SVAR: Inreprodukterna är noll och därmed är funktionsföljden ortogonal.

Funktionen f tilldelas fourierserien $f \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = 2U(t-3)e^{t-3}$
som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. $U(t)$ är Heavisides stegfunktion.

Lösning:

Laplacetransformera differentialekvationen.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = 2e^{-3s}\frac{1}{s-1}.$$

Insättning av villkoren ger $Y(s)(s^2 - 3s + 2) = 1 + 2e^{-3s}\frac{1}{s-1}$.

Faktorisera andragradspolynomet och lös ut den obekantas Laplacetransform.

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)} + 2e^{-3s}\frac{1}{(s-1)^2(s-2)}.$$

Det återstår nu att återtransformera. Den första termen kan återtransformeras direkt och för den andra termen användes två två steg.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} = \{\text{BETA 13.5, nr L28, 4 : e uppl.}\} = \frac{-e^t + e^{2t}}{1}.$$

För den andra termen användes BETA 13.5. nr L4 och L33.

Vi startar med L33: $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s-2)}\right\} = \frac{e^{2t} - e^t - te^t}{1}$.

Nu över till L4: $L^{-1}\left\{2e^{-3s}\frac{1}{(s-1)^2(s-2)}\right\} = 2U(t-3)(e^{2(t-3)} - e^{t-3} - (t-3)e^{t-3})$.

Vi sammanfattar och erhåller differentialekvationens lösning.

$$y(t) = e^{2t} - e^t + 2U(t-3)(e^{2(t-3)} - e^{t-3} - (t-3)e^{t-3})$$

Institutionen för matematik
KTH

SVAR: Den sökta lösningen ges av $y(t) = e^{2t} - e^{t} + 2U(t-3)(e^{2(t-3)} - e^{t-3} - (t-3)e^{t-3})$.

5. Differentialekvationen $2x^2 \dfrac{dy}{dx} = 3xy + y^2$ kan transformeras till en linjär differentialekvation genom att man sätter $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$. Bestäm den lösning som uppfyller villkoret $y(1) = -2$.

Lösning:

Vi omformar differentialekvationen genom division med y^2. Då erhålles $2x^2 y^{-2} \dfrac{dy}{dx} = 3xy^{-1} + 1$.

Derivering av $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ med avseende på x ger $z' = -y^{-2} y'$.

Insättning i differentialekvationen ger $2x^2(-z') = 3xz + 1$ vilken omformas till $z' + \dfrac{3}{2x} z = -\dfrac{1}{2x^2}$.

Vi har erhållit en linjär differentialekvation av första ordningen. Bestäm en integrerande faktor.

En integrerande faktor ges av $e^{\int \frac{3}{2x} dx} = e^{\frac{3}{2} \ln x} = x^{\frac{3}{2}}$.

Multiplicera differentialekvationen med integrerande faktor.

$x^{\frac{3}{2}} z' + \dfrac{3}{2x} x^{\frac{3}{2}} z = -\dfrac{1}{2x^2} x^{\frac{3}{2}}$, $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}} z\right) = -\dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$. Integration ger: $x^{\frac{3}{2}} z = -x^{\frac{1}{2}} + C$.

Substitutionen ger $x^{\frac{3}{2}} y^{-1} = -x^{\frac{1}{2}} + C$.

Bestäm integrationskonstanten. Villkoret ger $(-2)^{-1} = -1 + C$, $C = \dfrac{1}{2}$.

Vi löser ut den sökta funktionen. $x^{\frac{3}{2}} y^{-1} = -x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}$, $y^{-1} = -x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1 - 2x^2}{2x^{\frac{3}{2}}}$, $y = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{1 - 2x^2}$.

Vi har erhållit en lösning som är definierad för $x > \dfrac{1}{4}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{1 - 2x^2}$.

6. Betrakta differentialekvationen $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \dfrac{1}{4})y = 0$, $x > 0$.

Lösningar till denna homogena differentialekvation är

$y_1 = x^{-1/2} \cos x$, $y_2 = 7x^{-1/2} \sin x$, $y_3 = 5x^{-1/2} \cos x$, $y_4 = x^{-1/2} \sin x$, $y_5 = 3x^{-1/2} \cos x + 17x^{-1/2} \sin x$.

Bestäm en fundamentalmängd av lösningar, dvs en bas av lösningar, samt bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

Lösning:

Den givna differentialekvationen är linjär och av ordning två. En fundamentalmängd av lösningar består således av två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen.

Vi väljer ut två linjärt oberoende lösningar.

Tag y_1 och y_4, övriga lösningar kan erhållas som linjärkombinationer av dessa två.

Det liinjära oberoendet inses till exempel genom att studera ekvationen $ay_1 + by_4 = 0$.

Denna ekvation har endast den triviala lösningen $a = b = 0$, insättning av $x = \dfrac{\pi}{2}$ och $x = \pi$ ger detta.

Således är y_1 och y_4 linjärt oberoende.

Ett annat sätt att visa det linjära oberoendet är att visa att Wronskianen är skilt ifrån noll.

Den allmänna lösningen är en linjärkombination av fundmentallösningar.

$y = c_1 y_1 + c_4 y_4 = c_1\ x^{-1/2} \cos x + c_4\ x^{-1/2} \sin x$, där c_1 och c_4 är godtyckliga konstanter.

Institutionen för matematik
KTH

SVAR: En fundamentalmängd av lösningar ges av $\left\{ x^{-1/2}\cos x,\ x^{-1/2}\sin x \right\}$.

Den allmänna lösningen är $y = c_1\, x^{-1/2}\cos x + c_4\, x^{-1/2}\sin x$

7. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$.

Lösning:
Den allmänna lösningen erhålles som summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning. Vi startar med att bestämma den allmänna homogena lösningen och bestämmer härvid egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)$$

Egenvärdena är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 4$. Motsvarande egenvektorer erhålles ur systemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$\underline{\lambda_1 = 2}$

$\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = r_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, där r_1 är ett godtyckligt reellt tal.

$\underline{\lambda_2 = 4}$

$\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = r_2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, där r_2 är ett godtyckligt reellt tal.

Den allmänna homogena lösningen är $\mathbf{X}_h = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 4e^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi\mathbf{C}$, där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter och Φ är en fundamentalmatris.

En partikulärlösning är $\mathbf{X_p} = \Phi\int\Phi^{-1}\mathbf{F}\,dt$.

Inversen till fundamentalmatrisen är $\Phi^{-1} = \dfrac{1}{e^{6t}}\begin{pmatrix} e^{4t} & -4e^{4t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -4e^{-2t} \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix}$.

$$\Phi^{-1}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -4e^{-2t} \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Integration och insättning ger: $\mathbf{X_p} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 4e^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t - 2e^{2t} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t} - 2e^{4t} + 4te^{4t} \\ te^{4t} \end{pmatrix}$.

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} e^{2t} & 4e^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{2t} - 2e^{4t} + 4te^{4t} \\ te^{4t} \end{pmatrix}$.