Kurvan $\square$ uppdelas i ett ändligt antal delar.

Låt $\mathbf{r}_k$ svara mot en delningspunkt och $\Delta\mathbf{r}_k$ svara mot den rätlinjiga förflyttningen från $\mathbf{r}_{k-1}$ till $\mathbf{r}_k$. Låt vidare kraften $\mathbf{F}(\mathbf{r}_k)$ vara konstant vid denna förflyttning. Det uträttade arbetet är: $\mathbf{F}(\mathbf{r}_k)\cdot\Delta\mathbf{r}_k$.

Det totala arbetet blir: $\mathbf{S} = \sum_k \mathbf{F}(\mathbf{r}_k)\cdot\Delta\mathbf{r}_k$.

Detta upprepas med en följd av indelningar, där längden L hos den längsta av delförflyttningar $\to 0$.

Man får en följd av summor $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_i,\ \ldots$

Definition av linjeintegral.

Låt $\mathbf{F} = (P,\ Q)$ vara en funktion av typ $R^2 \to R^2$ och låt γ vara en riktad kurva som helt ligger i funktionens definitionsmängd. Om summorna $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_i,\ \ldots$ bildas enligt ovan med en motsvarande maximal indelningslängd L_i som $\to 0$ då $i \to \infty$, så skrivs gränsvärdet av summorna (om det existerar):

$$\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma (P,\ Q) \cdot (dx,\ dy) = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Beräkning av linjeintegraler.

Om $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(x,y),\ Q(x,y))$ är kontinuerlig och γ är en reguljär riktad kurva med en parameterframställning: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, t: $a \to b$, där $\mathbf{r}(a)$ och $\mathbf{r}(b)$ är kurvans start - respektive slutpunkt,

så är $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot \mathbf{r}'(t)\right]dt$, dvs

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\right]dt.$$

Samband mellan linje - och dubbelintegral.

Greens formel

Låt γ vara en enkel och sluten kurva av ändlig längd, som genomlöps i positiv led och som utgör randen av ett område D.

Låt vidare P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ och $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ vara kontinuerliga i D.

Då är $\displaystyle \oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$

Definition av konservativa fält.

Låt **F** vara ett vektorfält definierad i ett sammanhängande och öppet område D. Om värdet av linjeintegralen $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ är lika för alla kurvor i D med samma start- och slutpunkter, så säger man att fältet är **konservativt i området**

Kriterier för konservativa fält.

Låt $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vara ett vektorfält definierat i ett öppet och sammanhängande område D.

Då är följande tre villkor ekvivalenta:

a) Fältet är konservativt.

b) $\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva helt belägen i D.

c) Det finns en funkton $U(\mathbf{r})$ definierad i D,

sådan att $grad U(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Funktionen U är då en potentialfunktion till fältet

och $\int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A)$.

Om fältet (P,Q) är konservativt i området D, så är

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$ för alla D :s punkter.

Definition av enkelt sammanhängande område.

Man säger att ett öppet, sammanhängande område D i planet är **enkelt sammanhängande** om varje enkel, sluten kurva i området omsluter en mängd som helt ligger i D.

Om villkoret $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ är uppfyllt i ett enkelt sammanhängande område D , så är fältet (P,Q) är konservativt i området.

Om Γ_1 och Γ_2 är två enkla slutna kurvor i ett område D i vilket fältet $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ är lokalt konservativt och om kurvorna omsluter samma mängd av singulära punkter så är

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \ .$$