

Om man förflyttar en enhetsnormalvektor  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{A})$  från en godtycklig punkt  $\mathbf{A}$  till en annan godtycklig punkt  $\mathbf{B}$  längs två olika enkla kurvor på ytan och låter normalvektorn  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$  variera kontinuerligt med  $\mathbf{r}$ , så kommer  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$  att vara densamma i båda fallen när man når punkten  $\mathbf{B}$ .

Man säger att en yta  $\Sigma$  är **orienterbar** om den uppfyller ovanstående. Vidare säger man att en sådan yta är **orienterad** om man angett ett av de två möjliga enhetsnormalfälten  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ .

Ytintegralen (flödesintegralen)  $\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) d\sigma$  av fältet  $\mathbf{F}$  över den orienterade reguljära ytan  $\Sigma$  med parameterframställningen  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{w})$ ,  $\mathbf{w} = (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$  samt normalfältet  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$  är

$$= \pm \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{w})) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \end{vmatrix} dudv, \text{ där tecknet } + \text{ respektive } - \text{ väljs}$$

allt eftersom  $\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \end{vmatrix}$  har samma eller motsatt tecken som  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ .

Om en yta  $\Sigma$  är sammansatt av ett ändligt antal reguljära yttstycken (dvs styckvis reguljära), så är  $\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) d\sigma$  summan av ytintegralerna över de olika delyttstyckena.

Med **käldensiteten** eller **divergensen**,  $\operatorname{div} \mathbf{F}$ , till ett vektorfält  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  i  $R^3$

menas funktionen av typ  $R^3 \rightarrow R$ :  $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ .

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot (P, Q, R)$$

Nablaoperatorn  $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$ .

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{F}, \quad \nabla \times \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \nabla U = \operatorname{grad} U$$

# Gauss sats, divergenssatsen

Låt  $\mathbf{F}$  vara ett fält i  $R^3$  med kontinuerliga derivator i kroppen  $K$  och låt kroppens rand  $\partial K$  vara en styckvis reguljär yta.

Då är :

$$\oint_{\partial K} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) d\Omega = \iiint_K (\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r})) dx dy dz \quad ,$$

där  $\hat{\mathbf{n}}$  är riktad ut från  $K$ .