

$$S = \sum_{i,k} f(x_i, y_k) \Delta x_i \Delta y_k$$

Riemannsumma till funktionen $f(x, y)$.

Indelningens diameter är den största av rektanglernas diagonaler.

Kroppens volym uppfattas som ett gränsvärde

$I = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i$ av en oändlig följd av Riemannsummor

$S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$ vars respektive diametrar $\rightarrow 0$ då $i \rightarrow \infty$.

Dubbelintegral över axelparallella rektanglar.

Om funktionen $f(x, y)$ är definierad i en rektangel $\square = \{(x, y, 0) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, sådan att varje följd av Riemannsummor $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$, vars respektive diametrar $\rightarrow 0$ då $i \rightarrow \infty$, konvergerar, så säger man att $f(x, y)$ är (Riemann-) integrerbar i \square .

Följdernas gränsvärde skrivs: $\iint_{\square} f(x, y) dx dy$

och kallas **dubbelintegralen** av f över \square .

Måttet 0, begreppet "nästan överallt".

En delmängd \square av R^2 sägs ha måttet 0 (noll) om man för varje $\square > 0$ kan omsluta den med en följd av cirklar $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$ vars sammanlagda area är mindre än \square .

En funktion som är kontinuerlig utom i en mängd med måttet 0, sägs vara kontinuerlig *nästan överallt*.

Om existens av Riemannintegraler.

Dubbelintegralen $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ där Ω är en axelparallell rektangel, existerar om och endast om $f(x,y)$ är kontinuerlig nästan överallt och begränsad i rektangeln.

Dubbelintegraler över godtyckliga begränsade områden.

Om Ω är en begränsad mängd, så är

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_{\Omega'} F(x,y) dx dy$$

där Ω' är någon axelparallell rektangel som omfattar Ω och

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{då } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{då } (x,y) \in \Omega' \setminus \Omega \end{cases}$$

Om Ω är en begränsad mängd vars rand är en styckvis reguljär kurva och den begränsade funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig nästan överallt i Ω så existerar dubbelintegralen $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$.

Arean av Ω ges av värdet på integralen $\iint_{\Omega} dx dy$.

De begränsade delmängderna av planet som på detta sätt tilldelas en area kallas *kvadrerbara* eller (Jordan-) *mätbara*.

Beräkning av dubbelintegraler.

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) dy dx = \int_{y=c}^d \int_{x=a}^b f(x, y) dx dy$$

Om $\Omega = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, där $y = \varphi(x)$ och $y = \psi(x)$ är styckvis reguljära kurvor, så är

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx$$

och analogt

Om $\Omega = \{(x, y) \mid \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d\}$, där $x = \varphi(y)$ och $x = \psi(y)$ är styckvis reguljära kurvor, så är

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx dy$$

I båda fallen förutsätts att integralerna i de högra leden existerar.

För alla integrerbara funktioner och kvadrerbara mängder gäller:

a) (Integralens linjäritet)

$$\iint_{\Omega} (c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)) dx dy = \\ = c_1 \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy + c_2 \iint_{\Omega} g(x, y) dx dy,$$

där c_1 och c_2 är konstanter

b) (Integralens additivitet)

Om $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ och $\Omega_1 \cap \Omega_2$ är en mängd av mått 0

$$\text{så är } \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) dx dy.$$

c) (Okänslighet för mängder av mått 0)

Om Ω har måttet 0 så är $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = 0$.

d) (Integralens monotonitet)

Om $f(x,y) \leq g(x,y)$ i ett område Ω , så är

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy \leq \iint_{\Omega} g(x,y) dx dy$$

e) (Triangelolikheten)

$$\left| \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_{\Omega} |f(x,y)| dx dy$$

(Medelvärdessatsen för dubbelintegraler.)

Om $f(x, y)$ är kontinuerlig och begränsad i det sammanhängande området Ω så är

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \iint_{\Omega} dx dy$$

för någon punkt (ξ, η) i Ω .

(Riemannsummor över "godtyckliga" delområden)

Om $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$ är en oändlig följd av Riemannsummor till den integrabla funktionen $f(x, y)$ och tillhörande

indelningar har diametrar $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots$ som $\rightarrow 0$ då $i \rightarrow \infty$,

så är $\lim_{i \rightarrow \infty} S_i = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$.

(Substitutioner i dubbelintegraler)

Om $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ är en kontinuerligt deriverbar och inverterbar funktion av typ $R^2 \rightarrow R^2$ och avbildar området Ω i \mathbf{t} -planet på området Γ i \mathbf{x} -planet, och om funktionaldeterminanten $\det(\mathbf{x}'(\mathbf{t})) \neq 0$ nästan överallt i Ω , så är

$$\iint_{\Gamma} f(\mathbf{x}) dx dy = \iint_{\Omega} f(\mathbf{x}(\mathbf{t})) |\det(\mathbf{x}'(\mathbf{t}))| du dv$$

för alla integrerbara funktioner $f(x, y)$.

Man säger att delmängderna $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i, \dots$ är

en *uttömmande följd* till Ω om

a) Delmängderna Ω_i är begränsade och har en area.

b) $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_i \supset \dots \supset \Omega$.

c) Avståndet från origo till mängden $\Omega \setminus \Omega_i$ växer mot ∞ då $i \rightarrow \infty$.

Låt Ω vara en obegränsad mängd och $f(x, y)$ en funktion som är integrerbar på varje kvadrerbar del av Ω .

Om gränsvärdet $I = \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_i} f(x, y) dx dy$ är oberoende av vilken

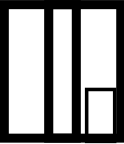
uttömmande följd $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i, \dots$ som valts till Ω , så är

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = I.$$

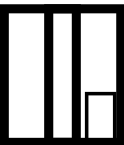
Om I är reellt är integralen konvergent och i motsatt fall divergent.

Om $f(x, y) \geq 0$ i området Ω så existerar gränsvärdet $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega_i} f(x, y) dx dy$ och är oberoende av vilken uttömmande följd $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i, \dots$ som valts till Ω .

(Om absolut konvergens)

 $\iint f(x, y) dx dy$ är konvergent

□

 $\iint |f(x, y)| dx dy$ är konvergent

Trippelintegraler.

Volymen av en kropp K är $\iiint_K dx dy dz$.

De begränsade delmängderna av rummet \mathbf{R}^3 som på detta sätt tilldelas en volym kallas (Jordan-)mätbara.

$$\iiint_K f(\mathbf{x}) dx dy dz = \iiint_{K'} f(\mathbf{x}(\mathbf{t})) |\det(\mathbf{x}'(\mathbf{t}))| du dv dw$$

Sfäriska koordinater.

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\z &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r &\geq 0 \\0 &\leq \vartheta \leq \pi \\0 &\leq \varphi < 2\pi\end{aligned}$$

Funktionaldeterminanten

$$\det\left(\frac{d(x, y, z)}{d(r, \vartheta, \varphi)}\right) = r^2 \sin \vartheta$$

Cylinderkoordinater

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$z \in \mathbf{R}$$

Funktionaldeterminanten

$$\det\left(\frac{d(x, y, z)}{d(r, \varphi, z)}\right) = r$$

Areor av buktiga ytor.

Godtycklig reguljär yta.

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in \mathbf{D} \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbf{D}$$

Om $\mathbf{r} = r(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in \mathbf{D}$ är en reguljär yta Σ , så är

$$A = \iint_{\mathbf{D}} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \quad \text{dess area.}$$