$$S = \sum_{i,k} f(\xi_{ik})\Delta x_i \Delta y_k$$

Riemannsumma till funktionen $f(x, y)$.

Indelningens diameter är den största av rektanglernas diagonaler.

Kroppens volym uppfattas som ett gränsvärde $I = \lim\limits_{i \to \infty} S_i$ av en oändlig följd av Riemannsummor $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$ vars respektive diametrar $\to 0$ då $i \to \infty$.

Dubbelintegral över axelparallella rektanglar.

Om funktionen $f(x, y)$ är definierad i en rektangel

$\square = \{(x,y,0) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$, sådan att varje

följd av Riemannsummor $S_1,\ S_2,\ \ldots, S_i,\ \ldots$, vars

respektive diametrar $\to 0$ då $i \to \infty$, konvergerar,

så säger man att $f(x, y)$ är (Riemann-) integrerbar i $\square$.

Följdernas gränsvärde skrivs: $\iint_{\square} f(x, y)dxdy$

och kallas **dubbelintegralen** av f över $\square$.

Måttet 0, begreppet "nästan överallt".

En delmängd □ av R^2 sägs ha måttet 0 (noll) om man för varje $□ > 0$ kan omsluta den med en följd av cirklar C_1 , C_2 , ... , C_i , ... vars sammanlagda area är mindre än $□$.

En funktion som är kontinuerlig utom i en mängd med måttet 0, sägs vara kontinuerlig *nästan överallt*.

Om existens av Riemannintegraler.

Dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ där D är en axelparallell rektangel, existerar om och endast om $f(x,y)$ är kontinuerlig nästan överallt och begränsad i rektangeln.

Dubbelintegraler över godtyckliga begränsade områden.

Om Ω är en begränsad mängd, så är

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \iint_D F(x,y)\,dxdy$$

där D är någon axelparallell rektangel som omfattar Ω och

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{då } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{då } (x,y) \in D \setminus \Omega \end{cases}$$

Om D är en begränsad mängd vars rand är en styckvis reguljär kurva och den begränsade funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig nästan överallt i D så existerar dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

Arean av D ges av värdet på integralen $\iint_D dxdy$.

De begränsade delmängderna av planet som på detta sätt tilldelas en area kallas *kvadrerbara* eller (Jordan-) *mätbara*.

Beräkning av dubbelintegraler.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Om $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, där $y = \varphi(x)$ och $y = \psi(x)$

är styckvis reguljära kurvor, så är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

och analogt

Om $D = \{(x,y) \mid \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ c \le y \le d\}$, där $x = \varphi(y)$ och $x = \psi(y)$

är styckvis reguljära kurvor, så är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

I båda fallen förutsätts att integralerna i de högra leden existerar.

För alla integrerbara funktioner och kvadrerbara mängder gäller:

a) (Integralens linjäritet)

$$\iint_{\Omega}\left(c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)\right)dxdy =$$

$$= c_1 \iint_{\Omega} f(x,y)dxdy + c_2 \iint_{\Omega} g(x,y)dxdy,$$

där c_1 och c_2 är konstanter

b) (Integralens additivitet)

Om $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ och $\Omega_1 \cap \Omega_2$ är en mängd av mått 0

så är $\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$.

c) (Okänslighet för mängder av mått 0)

Om Ω har måttet 0 så är $\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = 0$.

d) (Integralens monotonitet)

Om $f(x,y) \le g(x,y)$ i ett område Ω, så är

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy \le \iint_{\Omega} g(x,y)\,dxdy$$

e) (Triangelolikheten)

$$\left|\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_{\Omega} \left|f(x,y)\right| dxdy$$

(Medelvärdessatsen för dubbelintegraler.)

Om $f(x, y)$ är kontinuerlig och begränsad

i det sammanhängande området □ så är

$$\square\square_{\square} f(x,y)\,dxdy = f(\square,\square)\,\square\square_{\square}\,dxdy$$

för någon punkt $(\square,\square)$ i □.

(Riemannsummor över "godtyckliga" delområden)

Om $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$ är en oändlig följd av Riemannsummor till den intgrabla funktionen $f(x,y)$ och tillhörande indelningar har diametrar $d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots$ som $\to 0$ då $i \to \infty$,

så är $\lim\limits_{i \to \infty} S_i = \iint_D f(x,y)\,dxdy$.

(Substitutioner i dubbelintegraler)

Om $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ är en kontinuerligt deriverbar och inverterbar funktion av typ $R^2 \to R^2$ och avbildar området D' i $\mathbf{t}$- planet på området D i $\mathbf{x}$ - planet, och om funktionaldeterminanten $\det(\mathbf{x}'(\mathbf{t})) \neq 0$ nästan överallt i D', så är

$$\iint_{D} f(\mathbf{x})\,dxdy = \iint_{D'} f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))\left|\det(\mathbf{x}'(\mathbf{t}))\right| dudv$$

för alla integrerbara funktioner $f(x, y)$.

Man säger att delmängderna $\square_1, \square_2, \ldots, \square_i, \ldots$ är en *uttömmande följd* till $\square$ om

a) Delmängderna $\square_i$ är begränsade och har en area.

b) $\square_1 \,\square\, \square_2 \,\square\, \square_i \,\square \ldots \square\, \square$.

c) Avståndet från origo till mängden $\square \setminus \square_i$ växer mot då $i \,\square$.

Låt $\square$ vara en obegränsad mängd och $f(x, y)$ en funktion som är integrerbar på varje kvadrerbar del av $\square$.

Om gränsvärdet $I = \lim\limits_{i \square} \square\square_{\square_i} f(x,y)\,dxdy$ är oberoende av vilken uttömmande följd $\square_1, \square_2, \ldots, \square_i, \ldots$ som valts till $\square$, så är

$$\square\square_{\square} f(x,y)\,dxdy = I.$$

Om I är reellt är integralen konvergent och i motsatt fall divergent.

Om $f(x,y) \geq 0$ i området $\square$ så existerar gränsvärdet $\lim\limits_{i\square} \square\square_{\square_i} f(x,y)\,dxdy$ och är oberoende av vilken uttömmande följd $\square_1, \square_2, \ldots, \square_i, \ldots$ som valts till $\square$.

(Om absolut konvergens)

$$\iint f(x,y)\,dxdy \text{ är konvergent}$$

$$\Updownarrow$$

$$\iint \left|f(x,y)\right|dxdy \text{ är konvergent}$$

Trippelintegraler.

Volymen av en kropp K är $\iiint_K$ dxdydz.

De begränsade delmängderna av rummet $\mathbf{R}^3$ som på detta sätt tilldelas en volym kallas (Jordan-)*mätbara*.

$$\iiint_K f(\mathbf{x})\,dxdy\,dz = \iiint_{K'} f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))\left|\det(\mathbf{x}'(\mathbf{t}))\right| dudvdw$$

Sfäriska koordinater.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Funktionaldeterminanten

$$\det\left(\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \varphi)}\right) = r^2 \sin\theta$$

Cylinderkoordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ z \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Funktionaldeterminanten

$$\det\left(\frac{\mathrm{d}(x,y,z)}{\mathrm{d}(r,\theta,z)}\right) = r$$

Areor av buktiga ytor.

Godtycklig reguljär yta.

$$\mathbf{r} = r(\mathbf{w}) \ , \ \ \mathbf{w} \in \mathbf{D} \qquad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in \mathbf{D}$$

Om $\mathbf{r} = r(\mathbf{w}),\ \ \mathbf{w} \in \mathbf{D}$ är en reguljär yta Y, så är

$$A = \iint_{\mathbf{D}} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$ dess area.