

Version A. Svar.

5B1210-Matematik IV, för Bio2 &K2.

Lappskrivning nr 1, måndagen den 6 september 2004, kl 11.15-12.00.

BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till den autonoma differentialekvationen  $y' = y(y+1)(y-3)$ .  
OBS ! Man behöver ej lösa ekvationen.

.....

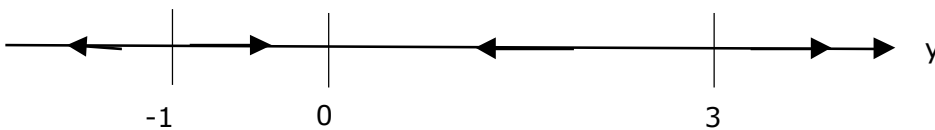
Lösningförslag:

De stationära lösningarna erhålles då derivatan är lika med noll.

Detta innebär att  $0 = y(y+1)(y-3)$ , vilket ger  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = -1$ ,  $y_3 = 3$ .

Nu över till de stationära punkternas karaktär.

Derivatans tecken studeras.



Attraktor:  $y_1 = 0$ , asymptotiskt stabil.

Repellator:  $y_2 = -1$  och  $y_3 = 3$ , instabila.

2. Lös begynnelsevärdesproblemet  $xy'' - 3y = 2x^5$ ,  $x > 0$ ,  $y(1) = 4$ .

.....

Lösningsförslag:

Skriv differentialekvationen på standardform.

$$y'' - 3x^{-1}y = 2x^4 \quad (1)$$

En integrerande faktor ges av:  $e^{\int -3x^{-1} dx} = e^{-3 \ln x} = x^{-3}$ .

Multiplitera (1) med integrerande faktor:  $x^{-3}y'' - 3x^{-4}y = 2x$ .

Detta omformas till  $(x^{-3}y)' = 2x$ .

Integrera med avseende på  $x$ :  $x^{-3}y = x^2 + C$ .

Bestäm konstanten.

$$y(1) = 4 \text{ ger } C = 3.$$

$$y = x^5 + 3x^3$$

3. En tank innehåller 200 liter med vätska i vilken 30 gram salt är löst. En lösning som innehåller 1 gram salt per liter pumpas in i tanken med en hastighet av 3 liter per minut.

a) Den välblandade lösningen pumpas ut med samma hastighet.

Ställ upp begynnelsevärdesproblemet.

b) Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 5 liter per minut.

Ställ upp begynnelsevärdesproblemet.

c) Bestäm koncentrationen hos saltlösningen i tanken för fallet a) efter lång tid.

.....

### Lösningförslag

Låt  $S(t)$  vara saltmängden vid tiden  $t$ .

a)

$$\frac{dS}{dt} = 3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{S}{200}, \quad S(0) = 30$$

b)

$$\frac{dS}{dt} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot \frac{S}{200 - t(5 - 3)}, \quad S(0) = 30$$

c)

Efter lång tid kommer koncentrationen vara lika med koncentrationen hos den saltlösning som pumpas in, dvs 1 gram salt per liter.