Efternamn Förnamn Personnummer Program | 1 | 2 | 3 | Summa |Betyg|

Version A.
5B1210-Matematik IV, för Bio2 &K2.
Lappskrivning nr 2, måndagen den 20 september 2004, kl 11.15-12.00.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. . En homogen linjär differentialekvationen med konstanta koefficienter av ordning två har bland annat följande lösningar: $y_1 = 5e^x$, $y_2 = e^{3x}$, $y_3 = 7e^x + 2e^{3x}$ och $y_4 = 4e^{3x}$.
Bestäm en fundamentalmängd av lösningar samt skriv upp den allmänna lösningen med hjälp denna fundamentalmängd av lösningar.
Skriv även upp en sådan differentialekvation som har denna fundamentalmängd som lösning.

……………………………………………………………………………….……………

Lösningsförslag:
Det behövs två linjärt oberoende lösningar.
Vi väljer $y_1 = 5e^x$ och $y_2 = e^{3x}$ eller ännu bättre $y_5 = e^x$ och $y_2 = e^{3x}$.
Dessa är linjärt oberoende.
En fundamentalmängd av lösningar är $\{e^{3x},\ e^x\}$.
Den allmänna lösningen ges av $y = Ae^{3x} + Be^x$.
Den karaktäristiska ekvationen till differentialekvationen har rötterna: $r_1 = 1$ och $r_2 = 3$. Differentialekvationen har då formen $(D-1)(D-3)y = 0$ eller i utvecklad form $y'' - 4y' + 3y = 0$.

SVAR: En fundamentalmängd av lösningar är $\{e^{3x},\ e^x\}$.
Den allmänna lösningen ges av $y = Ae^{3x} + Be^x$.
Differentialekvationen har formen $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Efternamn Förnamn Personnummer Program | 1 | 2 | 3 | Summa |Betyg|

2. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

En partikel placeras vid tiden $t = 0$ i punkten $(1, -2)$. Bestäm vart partikeln tar vägen efter lång tid.

…………………………………………………………………………………………….…………………

Lösningsförslag:

Vi börjar med att bestämma egenvärden till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ och därefter motsvarande egenvektorer.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda - 1 + 2)(\lambda - 1 - 2) = (\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

Nu över till bestämning av motsvarande egenvektorer.

Dessa fås ur ekvationen $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$ med aktuellt λ-värde insatt.

$\lambda_1 = -1$ ger $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$ en lösning ges av $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 3$ ger $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$ en lösning ges av $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

För att bestämma partikelns vidare öden kan vi till exempel konstatera att punkten ligger på den egenriktning som ges av $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och därmed går partikeln mot origo efter lång tid.

Ett annat alternativ är att bestämma den lösning som går punkten $(1, -2)$.

Vi erhåller då $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vilket har lösningen $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Den lösning som går genom punkten $(1, -2)$ ges av $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t}$, vilken går mot origo efter lång tid.

SVAR: Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Partikeln går mot origo efter lång tid.

Efternamn Förnamn Personnummer Program | 1 | 2 | 3 | Summa |Betyg|

3 Bestäm alla kritiska punkter till systemet: $\begin{cases} x' = -3x + y^2 + 2 \\ y' = x - y^2 \end{cases}$.

Bestäm deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgör om de är stabila eller instabila.

………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag

Kritiska punkter erhålles då tangentvektorn är lika med nollvektorn.

Vi söker således lösningar till systemet $\begin{cases} 0 = -3x + y^2 + 2 \\ 0 = x - y^2 \end{cases}$ härur får vi att

$\begin{cases} 0 = -3x + x + 2 \\ x = y^2 \end{cases}$ dvs $\begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$ vilket ger punkterna $(1,1)$ och $(1,-1)$.

Vi övergår nu till att linjarisera det icke-linjära systemet och bestämmer därvid Jacobimatrisen för funktionen $\begin{pmatrix} -3x + y^2 + 2 \\ x - y^2 \end{pmatrix}$.

Jacobimatrisen är lika med $\begin{pmatrix} -3 & 2y \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$.

Insättning av respektive punkt ger oss en matris, vars egenvärden vi bestämmer.

Punkterna $(1,1)$ ger matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Egenvärdena fås ur ekvationen

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 4).$$

Egenvärdena är reella, skilda och negativa vilket innebär att den kritiska punkten är en stabil nod både i det linjariserade systemet och det icke-linjära systemet.

Punkterna $(1,-1)$ ger matrisen $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Egenvärdena fås ur ekvationen

$$0 = \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 4 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 4 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{17}{4}.$$

Egenvärdena är $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

Egenvärdena är reella, skilda och har olika tecken vilket innebär att den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil både i det linjariserade systemet och det icke-linjära systemet.

SVAR: De kritiska punkterna är $(1,1)$, stabil nod, och $(1,-1)$, sadelpunkt och därmed instabil.