Efternamn Förnamn Personnummer Program | 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

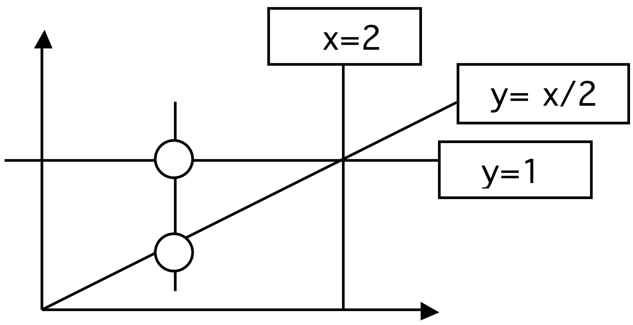
Version A.
5B1210-Matematik IV, för Bio2 & K2.
Lappskrivning nr 3, måndagen den 4 oktober 2004, kl 11.15-12.00.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Kasta om integrationsordningen hos dubbelintegralen

$$\int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=\frac{x}{2}}^{1} f(x,y)\ dy\right)dx .$$

……………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Vi ritar först upp området.
Vi ser att området beskrivs av $D=\left\{(x,y):\ 0\le x\le 2\ ,\ \frac{x}{2}\le y\le 1\right\}$.
Detta område har följande utseende.



Vi byter nu integrationsordning.

$$\int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=\frac{x}{2}}^{1} f(x,y)\ dy\right)dx=\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{2y} f(x,y)\ dy\right)dx .$$

Svar: Efter omkastning av integrationsordningen erhålles

$$\int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=\frac{x}{2}}^{1} f(x,y)\ dy\right)dx=\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{2y} f(x,y)\ dy\right)dx .$$

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x\,dxdy$$

där D ges av olikheterna $4 \le x^2 + y^2 \le 9$, $x \ge 0$.

…………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Vi inför polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}$.

Området beskrivs då av $D_{rv} = \left\{ (r,v):\ 2 \le r \le 3\ ,\ -\dfrac{\pi}{2} \le v \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

Ytelementet $dxdy$ ersätts av $rdrdv$.

Dubbelintegralen blir

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_{D_{rv}} r\cos v\ \ rdrdv = \int_{r=2}^{3} r^2 dr \int_{v=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v\,dv = \frac{3^3 - 2^3}{3} 2\sin\frac{\pi}{2} = \frac{38}{3}$$

Svar: Dubbelintegralen blir 38/3.

3. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av paraboloiderna $z = x^2 + y^2$ och $z = 4 - x^2 - y^2$.

………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag

Volymen ges av trippelintegralen $V = \iiint_V dxdydz$.

Vi börjar integration i z-led.
Observera att den första paraboloiden ligger under den andra paraboloiden.

$$V = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{z=x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz \right) dxdy = \iint_{D_{xy}} \left(\left\{ 4 - 2x^2 - 2y^2 \right\} \right) dxdy$$

Nu bestämmer vi området i xy-planet.
Detta erhålles som skärningen mellan paraboloiderna.
Vi får $x^2 + y^2 = 4 - x^2 - y^2$ vilket blir $x^2 + y^2 = 2$.

Vi inför polära koordinater: $\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}$.

Området beskrivs då av $D_{rv} = \left\{ (r,v):\ 0 \le r \le \sqrt{2}\ ,\ 0 \le v \le 2\pi \right\}$.

Ytelementet $dxdy$ ersätts av $rdrdv$.

Volymen blir $V = 2\iint_{D_{rv}} \left(\left\{ 2 - r^2 \right\} \right) rdrdv = 2\pi 2\left[(\sqrt{2})^2 - \frac{(\sqrt{2})^4}{4} \right] = 4\pi$.

Svar: Volymen $V = 4\pi$.