Efternamn   Förnamn   Personnummer   Program | 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

Version A.
5B1210-Matematik IV, för Bio2 & K2.
Lappskrivning nr 4, tisdagen den 12 oktober 2004, kl 14.15-15.00.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Beräkna linjeintegralen

$$\oint_C (2xe^y + y)dx + x^2e^y dy$$

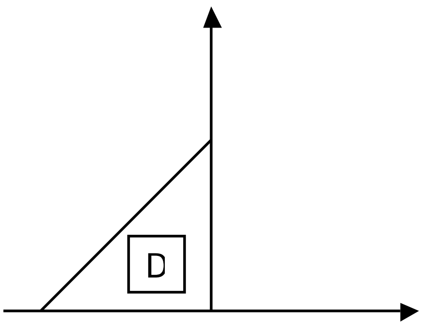
där C är randen till triangeln med hörn i (0,0) , (0,1) och (-1,0) tagen i positiv led.

………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Sluten kurva i positiv led och kontinuerligt vektorfält.
Vi använder oss av Greens formel.

$$\oint_C (2xe^y + y)dx + x^2e^y dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2e^y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xe^y + y) \right) dxdy = \iint_D \{2xe^y - 2xe^y - 1\} dxdy = -\iint_D dxdy$$

Det återstår att beräkna arean av området D, dvs triangelarean.



Arean är lika med $\frac{1 \cdot 1}{2}$.

SVAR: Linjeintegralen är lika med $-\frac{1}{2}$.

2. Beräkna ytintegralen

$$\iint_S (2z+y)\,d\sigma$$

där S är den del av planet $2x+y+2z=6$ som ligger i första oktanten, där $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

…………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Vi projicerar ytan på xy-planet.

Eliminera därvid z i integranden.

Vidare ersätts ytelementet $d\sigma$ med $d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$.

Bestäm en enhetsnormal till planet.

En normal erhålles direkt ur planets ekvation som koefficienterna.

En enhetsnomal $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{(2,1,2)}{|(2,1,2)|} = \dfrac{(2,1,2)}{3}$.

Tredjekomponenten i enhetsnormalen är $\cos\gamma = \dfrac{2}{3}$.

Ytintegralen övergår i

$$\iint_S (2z+y)\,d\sigma = \iint_D (6-2x)\frac{dxdy}{\left|\frac{2}{3}\right|} = 3\iint_D (3-x)\,dxdy$$

Området är en triangel med begränsningslinjerna $2x+y=6$, $x=0$ och $y=0$.

Integrera först med avseende på y därefter med avseende på x.

$$\iint_S (2z+y)\,d\sigma = 3\iint_D (3-x)\,dxdy = 3\int_{x=0}^{3}\left(\int_{y=0}^{6-2x}(3-x)\,dy\right)dx = 3\int_{x=0}^{3}\{(3-x)(6-2x)\}\,dx$$

$$\iint_S (2z+y)\,d\sigma = 6\int_{x=0}^{3}\{(3-x)^2\}\,dx = 2\cdot 3^3 = 54$$

SVAR: Ytintegralen $\iint_S (2z+y)\,d\sigma = 54$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{v} = (x^2,\ 2y,\ z)$ ut ur $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

………………………………………………………………………………………………….……………

Lösningsförslag

Flödet ut ur sfären ges av

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ d\sigma$$

Här är enhetsnormalvektorn utåtriktad.
Vi använder divergenssatsen.
Då övergår flödesintegralen i en trippelintegral.

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ d\sigma = \iiint_K div\mathbf{v}\ \ dxdydz = \iiint_K div(x^2,\ 2y,\ z)\ \ dxdydz = \iiint_K (2x + 2 + 1)\ \ dxdydz$$

Integranden består av en del som är udda och den delen ger inget bidrag till
Integralen ty området är origosymmetriskt.
Vi erhåller då

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ d\sigma = 3\iiint_K dxdydz\ \ = 3\frac{4\pi R^3}{3}\ \ = 4\pi R^3$$

SVAR: Flödet ut ur sfären är lika med $4\pi R^3$.