Efternamn Förnamn Personnummer Program | 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

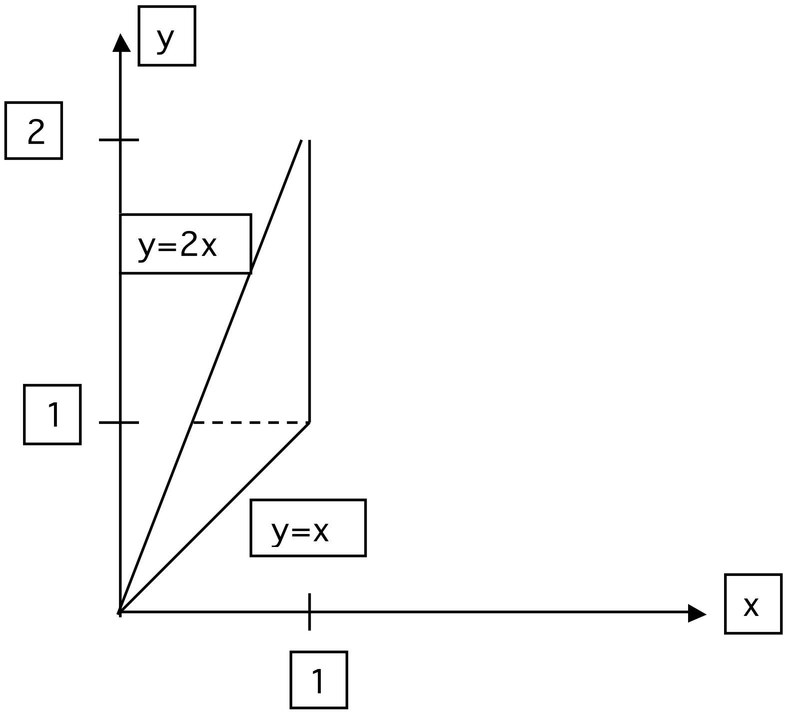
Version A.
5B1210-Matematik IV, för Bio2 & K2.
Lappskrivning nr 3, torsdagen den 20 oktober 2005, kl 15.15-17.15.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Kasta om integrationsordningen hos dubbelintegralen

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x}^{2x} f(x,y)\ dy\right)dx \quad .$$

……………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:



$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x}^{2x} f(x,y)\ dy\right)dx = \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y/2}^{y} f(x,y)\ dx\right)dy + \int_{y=1}^{2}\left(\int_{x=y/2}^{1} f(x,y)\ dx\right)dy$$

SVAR: Omkastning av integrationsordningen ger följande:

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x}^{2x} f(x,y)\ dy\right)dx = \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y/2}^{y} f(x,y)\ dx\right)dy + \int_{y=1}^{2}\left(\int_{x=y/2}^{1} f(x,y)\ dx\right)dy$$

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

där D ges av olikheterna $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $0 \le y$.

………………………………………………………………………………………………….…………

Lösningsförslag:

Inför polära koordinater: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

Området D beskrivs i polära koordinater.

$$D_{r\theta} : \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Integrationselementet $dxdy = rdrd\theta$.

Insättning i dubbelintegralen ger:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint_{D_{r\theta}} \frac{1}{r}\,rdrd\theta = \iint_{D_{r\theta}} drd\theta = (2-1)(\pi-0) = \pi$$

SVAR: Den sökta dubbelintegralen blir:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \pi$$.

3. Beräkna volymen av den ändliga kropp som begränsas av planet $2x+3y+4z=12$ och koordinatplanen $x=0$, $y=0$ och $z=0$.

……………………………………………………………………………………………….…………

Lösningsförslag

Volymen av den ändliga kroppen ges av trippelintegralen $V=\iiint_K dxdydz$.

Vi startar med integration i z-led:

$$V=\iint_{D_{xy}}\left(\int_{z=0}^{(12-2x-3y)/4}dz\right)dxdy=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}(12-2x-3y)dxdy$$

Därefter företages integration i y-led och slutligen i x-led:

$$V=\frac{1}{4}\int_{x=0}^{6}\left(\int_{y=0}^{4-\frac{2x}{3}}(12-2x-3y)dy\right)dx=\frac{1}{4}\int_{x=0}^{6}(48-8x-8x+\frac{4x^2}{3}-\frac{3}{2}(4-\frac{2x}{3})^2)dx$$

Hyfsning ger: $V=\frac{1}{4}\int_{x=0}^{6}(24-8x+\frac{2x^2}{3})dx=\frac{1}{4}\left[144-4\cdot 36+\frac{2\cdot 6^3}{3\cdot 3}\right]=12$.

SVAR: Volymen är 12 volymsenheter.

<u>Anmärkning:</u> Volymen kan även erhållas som höjden*basytan/3,
Vilket i detta fall blir 3*(6*4/2)/3=12.