Efternamn   Förnamn   Personnummer   Program   | 1  | 2 | 3 | Summa | Betyg |

Version A.
5B1210-Matematik IV, för Bio2 & K2.
Lappskrivning nr 4, torsdagen den 20 oktober 2005, kl 15.15-17.15.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Bestäm den potential $U(x,y)$ till vektorfältet $\mathbf{F} = \left(2xy - x^2, x^2 + y^2\right)$ som uppfyller villkoret $U(0,0) = 1$. Bestäm därefter linjeintegralen $\int_C \left(2xy - x^2)dx + (x^2 + y^2\right)dy$ där C är kurvan $y = \sin\dfrac{5\pi x}{2}$ från (0.0) till (1,1).

……………………………………………………………………………….……………

Lösningsförslag:
En potential $U(x,y)$ uppfyller villkoret $gradU(x,y) = \mathbf{F}$.
Vi erhåller således följande system av partiella differentialekvationer:

$$\begin{cases} U'_x = 2xy - x^2 \\ U'_y = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Integrera den översta ekvationen map x: $U(x,y) = x^2 y - \dfrac{x^3}{3} + f(y)$.
Derivera map y: $U'_y(x,y) = x^2 + f'(y)$.
De två uttrycken jämföres med varandra och vi erhåller: $f'(y) = y^2$.
Integration ger: $f(y) = \dfrac{y^3}{3} + A$.
Vår potential är nu bestämd och den är $U(x,y) = x^2 y - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^3}{3} + A$
Villkoret ger oss värdet på konstanten $A = 1$ och $U(x,y) = x^2 y - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^3}{3} + 1$.
Vid beräkning av linjeintegralen utnyttjar vi den bestämda potentialen.

$$\int_C \left(2xy - x^2)dx + (x^2 + y^2\right)dy = U(1,1) - U(0,0) = 1$$

SVAR: Potentialen $U(x,y) = x^2 y - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^3}{3} + 1$ och
linjeintegralen $\int_C \left(2xy - x^2)dx + (x^2 + y^2\right)dy = 1$

2. Beräkna linjeintegralen

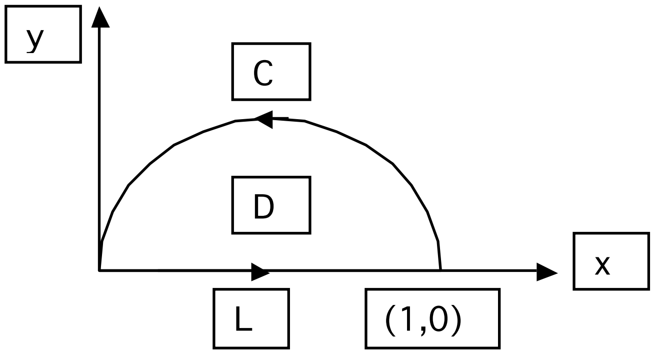
$$\int_C (e^{x+y} - y)dx + (e^{x+y} - 1)dy$$

där $C$ är kurvan tagen från punkten (1,0) till origo längs en halvcirkel i övre halvplanet

……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Slut kurvan med en rät linje L och därefter tillämpa Greens formel.
Det inneslutna området betecknas med D.




$$\int_C (e^{x+y} - y)dx + (e^{x+y} - 1)dy + \int_L (e^{x+y} - y)dx + (e^{x+y} - 1)dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y} - 1) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y} - y)\right] dxdy$$

$$\int_C (e^{x+y} - y)dx + (e^{x+y} - 1)dy + \int_{x=0}^{1} e^x dx = \iint_D dxdy$$

$$\int_C (e^{x+y} - y)dx + (e^{x+y} - 1)dy = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - e$$

Ytterligare ett förslag presenteras.

-----------------------------------------------------------------

Vi parameterframställer kurvan: $\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos t \\ y = \frac{1}{2}\sin t \end{cases}$ $\begin{cases} dx = -\frac{1}{2}\sin t\,dt \\ dy = \frac{1}{2}\cos t\,dt \end{cases}$ $t : 0 \to \pi$.

Insättning i integralen ger

$$A = \int_C (e^{x+y} - y)dx + (e^{x+y} - 1)dy = \int_{t=0}^{\pi} \left[(e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t} - \frac{1}{2}\sin t)(-\frac{1}{2}\sin t) + (e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t} - 1)(\frac{1}{2}\cos t)\right] dt$$

Omformning ger:

$$A = \left[e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t} + \frac{1}{8}(t - \frac{\sin 2t}{2}) - \frac{1}{2}\sin t\right]_{t=0}^{\pi} = 1 - e + \frac{\pi}{8}$$

SVAR: Linjeintegralen

$$\int_C (e^{x+y} - y)dx + (e^{x+y} - 1)dy = 1 - e + \frac{\pi}{8}$$

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ut genom sfären med medelpunkt i origo och med radien två .

……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag

En alternativ lösning är att tillämpa divergenssatsen.

$$\iint_S \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}d\sigma = \iiint_K div\,\mathbf{r}\,dxdydz = \iiint_K (1+1+1)dxdydz = 3\cdot\iiint_K dxdydz\,.$$

Vi erhåller tre gånger klotets volym.

$$\iint_S \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}d\sigma = 3\cdot\frac{4\pi\cdot 2^3}{3} = 32\pi.$$

-----------------------------------------------------------------

Ett annat förslag är att genomföra beräkningen direkt.

Flödet av ett vektorfält $\mathbf{r} = (x, y, z)$ genom en yta $S$ och i riktningen $\mathbf{n}$ ges av flödesintegralen $\iint_S \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}d\sigma$.

En normal till sfären ges av vektorn $\mathbf{r} = (x, y, z)$ och dess längd är 2.

Integranden blir $\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = (x, y, z)\cdot\frac{(x, y, z)}{2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} = \frac{r^2}{2}$.

På den aktuella ytan är $r = 2$ varvid integranden blir konstant lika med två.

Flödesintegralen blir $\iint_S \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}d\sigma = \iint_S 2\,d\sigma = 2\iint_S d\sigma$, vilket är sfärens dubbla area.

Vi får $\iint_S \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}d\sigma = 2\cdot 4\pi\cdot 2^2 = 32\pi$.

SVAR: Utflödet genom sfären är $32\pi$.