Efternamn   Förnamn Personnummer Program | 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

Version A.
5B1210-Matematik IV, för Bio2 &K2.
Lappskrivning nr 1, fredagen den 9 september 2005, kl 09.15-10.00.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Lös ekvationen $(x-x^2)y' = y + y^2$, där $y(2)=2$ och ange lösningens existensintervall.

………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Vi har en separabel differentialekvation, men den är även Bernoullsk .
Vi löser den som en separabel.
Konstantlösningarna är i detta fall ej av intresse.
Omforma differentialekvationen och förutsätt att $y \neq 0,\ y \neq -1, x \neq 0, x \neq 1$.

$$\frac{1}{y(1+y)}y' = \frac{1}{x(1-x)}$$

Partialbråksuppdela de rationella funktionerna.
Handpåläggningsmetoden ger oss följande:

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right)y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

Integrera med avseende på x. I vänstra ledet blir det en y-integration.

$$\ln|y| - \ln|1+y| = \ln|x| - \ln|1-x| + \ln|C_1|$$

$$\frac{y}{1+y} = \pm C_1\frac{x}{1-x} = C\frac{x}{1-x}$$

Bestäm konstanten.

Villkoret $y(2)=2$ ger: $\frac{2}{1+2} = C\frac{2}{1-2}$, $C = -\frac{1}{3}$.

Insättning och hyfsning ger:

$$3y(1-x) = -x(1+y)$$

$$3y - 2yx = -x$$

$$y = \frac{x}{2x-3}$$

Här måste $x \neq \frac{3}{2}$.

Lösningens existensintervall söktes.

Då är två intervall möjliga: $\left\{x : x > \frac{3}{2}\right\}$ eller $\left\{x : x < \frac{3}{2}\right\}$.

Det givna villkoret ger att det första intervallet är det aktuella.

SVAR: Differentialekvationen lösning är $y = \frac{x}{2x-3}$

och existensintervallet är $\left\{x : x > \frac{3}{2}\right\}$.

2. Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet de kritiska punkterna till den autonoma differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$.

Bestäm de startvärden y_0 för vilka $\lim_{x\to\infty} y(x)$ är ändligt.

OBS ! Man behöver ej lösa ekvationen.

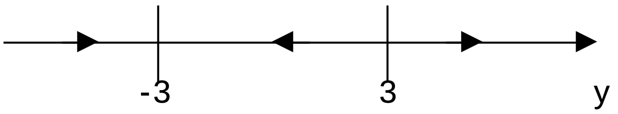
…………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Vi bestämmer först de kritiska punkterna, konstantlösningarna.
Dessa erhålles då derivatan är lika med noll.

Faktorisera högra ledet: $\frac{dy}{dx} = (y+3)(y-3)$. Konstantlösningarna -3 är 3.

Studera derivatans tecken och rita upp funktionens uppförande i faslinjen.



$y = -3$ är en asymptotiskt stabil lösning och $y = 3$ är en instabil lösning.

$\lim_{x\to\infty} y(x)$ är ändligt $\{y_0 : y_0 \le 3\}$.

SVAR:

$y = -3$ är en asymptotiskt stabil lösning.

$y = 3$ är en instabil lösning.

$\lim_{x\to\infty} y(x)$ är ändligt $\{y_0 : y_0 \le 3\}$.

3. I en enkel populationsmodell för antalet individer, $P(t)$, är den relativa tillväxthastigheten konstant, a.
I en annan modell är den relativa tillväxthastigheten summan av två termer.
Den ena termen är en positiv konstant, a, och den andra termen är proportionell mot populationen med en negativ proportionalitetskonstant, b.
En tredje modell erhålles genom att korrigera den andra modellen på följande sätt:
avlägsna ett konstant antal per tidsenhet, c.
Ställ upp dessa modeller.
Studera därefter vad som händer efter lång tid, då konstanterna sätts till $a = 5$, $b = -1$ och $c = 4$.
……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag

Modell 1: $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a$.

Modell 2: $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a + bP$.

Modell 3: $\frac{dP}{dt} = P(a + bP) - c$.

Insättning av konstanternas numeriska värden $a = 5$, $b = -1$ och $c = 4$ ger:

Modell 1: $\frac{dP}{dt} = 5P$.

Modell 2: $\frac{dP}{dt} = P(5 - P)$.

Modell 3: $\frac{dP}{dt} = P(5 - P) - 4 = (P - 1)(4 - P)$.

Vad händer efter lång tid ?

För modell 1 växer populationen obegränsat om startvärdet $P_0 > 0$.

För modell 2 går populationen mot $P = 5$ om startvärdet $P_0 > 0$.

För modell 3 går populationen mot $P = 4$, om startvärdet $P_0 > 1$.

SVAR:

Modell 1: $\frac{dP}{dt} = 5P$.

Modell 2: $\frac{dP}{dt} = P(5 - P)$.

Modell 3: $\frac{dP}{dt} = P(5 - P) - 4 = (P - 1)(4 - P)$.

För modell 1 växer populationen obegränsat om startvärdet $P_0 > 0$.

För modell 2 går populationen mot $P = 5$ om startvärdet $P_0 > 0$.

För modell 3 går populationen mot $P = 4$, om startvärdet $P_0 > 1$.