Efternamn Förnamn Personnummer Program | 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

Version A.
5B1210-Matematik IV, för Bio2 &K2.
Lappskrivning nr 2, tisdagen den 27 september 2005, kl 11.00-12.00.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där matrisen $\mathbf{A}$ ges av $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)$.

Egenvärdena är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 3$.
Detta inses även direkt ur den triangulära matrisen.

$\Rightarrow$ Nu över till motsvarande egenvektorer.

$\lambda_1 = 2$ insatt i ekvationen $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ger systemet $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

En lösning till detta system ges av $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En lösning till systemet av differentialekvationer är $\mathbf{X}_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 3$ insatt i ekvationen $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ger systemet $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

En lösning till detta system ges av $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En lösning till systemet av differentialekvationer är $\mathbf{X}_2 = e^{3t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen ges av

$$\Rightarrow \mathbf{X} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 5e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

SVAR: $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

2. Betrakta det linjära systemet av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$,
   där matrisen $\mathbf{A}$ har följande egenvärden:
   a) 2 och –4.
   b) 1 och 2.
   c) -1±5 i.
   Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet samt typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum).

……

Lösningsförslag:

a) Olika tecken på egenvärdena ger att vi har en sadelpunkt och därmed instabil.
b) Skilda positiva egenvärden ger att det är en instabil nod.
c) Komplexa egenvärden ger att det är en spiral. Egenvärdets realdel är negativt vilket innebär att det är en stabil spiral.

SVAR: a) Sadelpunkt, b) Instabil nod, c) Stabil spiral.

3. En linjär differentialekvation med konstanta koefficienter av ordning 3 har följande mängder som lösningar:

$A = \{e^x, xe^x, e^x + 3xe^x\}$

$B = \{7xe^x, 2e^x, e^x + e^{2x}\}$

$C = \{xe^x, e^x + e^{2x}, e^x + xe^x\}$

$D = \{2xe^x, e^x - 4e^{2x}, e^{2x}, xe^x + e^{2x} - 7e^x\}$

Vilken/vilka av dessa mängder kan vara en fundamental lösningsmängd ?

……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Vi söker de mängder som består av tre linjärt oberoende lösningar.

I mängden A är funktionerna linjärt beroende.

I mängden D är antalet funktioner för många och funktionerna är linjärt beroende.

Då det gäller mängderna B och C ser vi att antalet funktioner stämmer.
Den återstående frågan är om de är linjärt oberoende.
Här kan man gå till väga på olika sätt.
Ett sätt är att konstatera att dessa mängder är uppbyggda av mängden $\{xe^x, e^x, e^{2x}\}$. Denna mängd är uppenbart linjärt oberoende.
Det kan även visas genom att visa att Wronskianen är skilt ifrån noll.

$$W(xe^x, e^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} xe^x & e^x & e^{2x} \\ xe^x + e^x & e^x & 2e^{2x} \\ xe^x + 2e^x & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xe^x & e^x & e^{2x} \\ e^x & 0 & e^{2x} \\ 2e^x & 0 & 3e^{2x} \end{vmatrix} = -e^x(3e^{3x} - 2e^{3x}) = -e^{4x} \neq 0$$

Man kan även direkt beräkna Wronskianen i för mängderna B och C.
Utfallet blir det samma, dvs linjärt oberoende.

SVAR: Mängderna B och C är fundamentala lösningsmängder.

Anmärkning:
Hur kan en sådan differentialekvation av ordning tre se ut ?
Rötterna till karakteristiska ekvationen är följande: $r_{1,2} = 1,\ r_3 = 2$.
Det medför att motsvarande homogena differentialekvation har formen
$(D-1)^2(D-2)y = 0$ eller $(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 0$ eller $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.